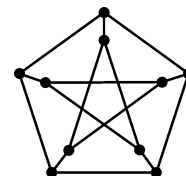


XL OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (19 de novembro de 2016)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Na década de 1970, iniciou-se no futebol inglês uma regra que vigora até os dias de hoje praticamente no mundo inteiro: a vitória passou a valer três pontos. A tese era de que com essa regra os times buscariam mais as vitórias, tornando assim as partidas mais disputadas e mais emocionantes para os torcedores, e que geraria mais gols.

É fato que houve um aumento no número de vitórias e também um aumento no número de vitórias por um gol de diferença. Assim, os gols não se tornaram mais abundantes, mas se tornaram mais decisivos e valiosos.

Os times passaram então a analisar seus resultados e calcular quantos pontos, em média, são conquistados por partida em relação ao número de gols marcados na partida. A primeira coisa a se perceber é que um único gol marcado garante, praticamente, um ponto (empate); dois gols deixam o time mais perto da vitória do que do empate; três ou quatro gols aproximam o time mais ainda da vitória, embora não seja garantida; marcar cinco ou mais gols garante, na imensa maioria das vezes, a vitória.

Dessa forma, os especialistas em futebol passaram a perceber que simplesmente somar os gols de um atacante não é a melhor maneira de avaliar a sua produtividade. Gols decisivos, aqueles que podem ser convertidos em vitórias e mais pontos, valem mais do que o terceiro e quarto gols, quando a vitória já está praticamente consumada. E mais, conseguiram modelar essa situação, chegando à conclusão de quantos pontos cada gol gera, em média, em uma determinada partida:

Primeiro gol do time	0,8 ponto
Segundo gol do time	1,0 ponto
Terceiro gol do time	0,6 ponto
Quarto gol do time	0,2 ponto
Quinto gol do time	0,1 ponto

Assim, percebemos que nem todo gol vale a mesma coisa, e que o segundo gol de um time é o mais valioso. Logo, além do total de gols marcados por um jogador, vale a pena calcular o total de pontos gerados pelos gols marcados.

a) Considere os dados de três grandes artilheiros da Série B do Brasileirão 2016 (até a 36ª rodada).

Jogador	Clube	Quantidade de primeiros gols	Quantidade de segundos gols	Quantidade de terceiros gols	Quantidade de quartos gols
Bill Lepo Lepo	Ceará	6	6	2	0
Nenê	Vasco	7	3	2	1
Felipe Garcia	Brasil de Pelotas	9	4	0	0

Veja que Bill Lepo Lepo marcou 14 gols e gerou $6 \times 0,8 + 6 \times 1,0 + 2 \times 0,6 = 12$ pontos. Calcule o número de gols e pontos gerados por Nenê e Felipe Garcia.

b) Analisando o campeonato inglês da temporada 2009/2010, veja como alguns atacantes contribuíram para a pontuação de seus times no campeonato.

Jogador	Número de gols	Pontos gerados
Wayne Rooney	26	20,6
Louis Saha	13	11,3
Cesc Fábregas	15	10,6
Dirk Kuyt	19	7,9

Denominamos *produtividade* o quociente $\frac{\text{Pontos gerados}}{\text{Número de gols}}$. Calcule a produtividade os quatro jogadores acima e coloque-os em ordem crescente de produtividade.

c) Explique por que podemos afirmar que Louis Saha marcou o segundo gol de sua equipe em alguma partida.

PROBLEMA 2

Nesse problema iremos apresentar um truque de cartas e a Matemática por trás dele. Vamos lá! Iremos precisar de um baralho com 52 cartas: 4 naipes (Ouro, Copas, Espadas e Paus) com 13 cartas cada um (Ás = 1; 2, 3, ..., 10, Valete = 11, Dama = 12, Rei = 13).

Coloque as cartas abertas (valor da carta visível) sobre a mesa, uma a uma, formando várias pilhas respeitando a seguinte regra: ao começar uma nova pilha, veja o valor da primeira carta e, partindo desse valor, conte (silenciosamente) até 13 acrescentando a cada número contado uma carta na pilha.

Por exemplo, se a primeira carta é um 8, você conta 8, 9, 10, 11, 12, 13 montando uma pilha com seis cartas. Normalmente você irá conseguir montar 5 ou 6 pilhas e irão restar poucas cartas. De fato, não importa quantas pilhas você monte desde que cada uma delas esteja “completa” (contada até 13). As cartas que sobram não fazem parte do truque.

Na figura A a seguir, temos 5 pilhas feitas: os valores das cartas iniciais são, respectivamente, 7, Valete = 11, Ás = 1, 9 e Rei = 13. Os números de cartas por pilha são, respectivamente, 7, 3, 13, 5 e 1. Como $7 + 3 + 13 + 5 + 1 = 29$, estão sobrando 23 cartas que não entrarão no truque. Poderíamos ter montado pelo menos mais uma pilha.

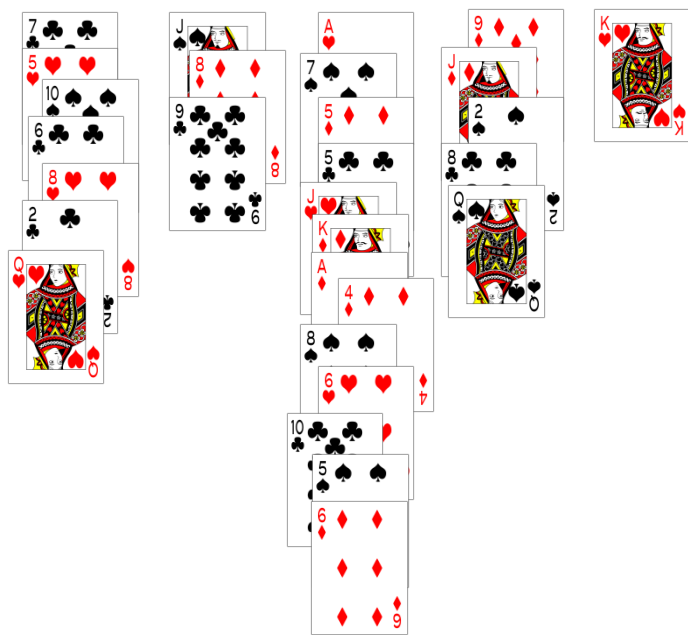


Figura A

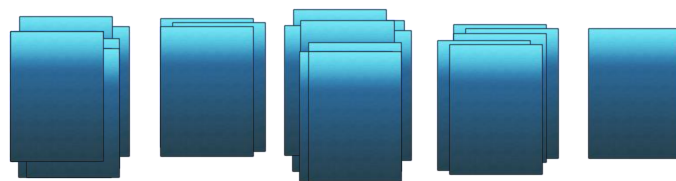


Figura B



Figura C

O próximo passo do truque é chamar um espectador para virar as pilhas de ponta-cabeça e permitir que mude a ordem das pilhas à vontade (figura B). Então peça para ele devolver as pilhas para você exceto três pilhas. Para aumentar o efeito do truque, faça esse passo com os olhos fechados. Essas cartas devolvidas, você pode colocar no monte das cartas não utilizadas no truque. Para finalizar, você deve pedir para o espectador mostrar a carta do topo de duas das três pilhas restantes. Na figura C, as cartas mostradas são o Rei = 13 e o 7.

Agora a conclusão do truque! Você soma – mentalmente! – o número de cartas não utilizadas com os totais de cartas nas pilhas devolvidas, 13 e 5, nesse exemplo, obtendo 41. Subtrai, agora, dos valores mostrados nas duas pilhas que ainda estão mesa, 13 e 7, obtendo 21. Para fechar é só subtrair 10 (esse valor, na subtração final, é fixo), obtendo 11. A carta no topo da última pilha é um valete! É claro que você deve colocar um bocado de suspense nesse final!

Como explicar o mistério? É o que faremos nos itens abaixo.

- Sendo a o valor da primeira carta de uma pilha, quantas cartas terá a pilha?
- Sendo a, b, c, d, e os valores das primeiras cartas de cada uma das 5 pilhas formadas, quantas cartas não serão utilizadas no truque? Suponha que seja possível formar as 5 pilhas.
- Novamente, sendo a, b, c, d, e os valores das primeiras cartas de cada uma das 5 pilhas formadas, suponha que foram devolvidas as pilhas iniciadas por a e b , ou seja, as pilhas iniciadas por c, d e e ficaram na mesa. Considere também que o espectador virou as cartas c e d das três pilhas que ficaram na mesa. Explique como é possível, utilizando os passos indicados no truque, concluir que a carta sobre a última pilha é e .

PROBLEMA 3

Seja $x_1 = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos, uma fração irredutível. Considere a sequência em que o termo inicial é x_1 e, sendo x um termo da sequência, para obter o próximo termo, temos a seguinte regra: se a é ímpar, o próximo termo é $\frac{3x+1}{2}$; se a é par, o próximo termo é $\frac{x}{2}$.

Por exemplo, sendo $x_1 = \frac{5}{7}$, temos $a = 5$ e $b = 7$. Logo, como a é ímpar, o próximo termo é $x_2 = \frac{3x_1+1}{2} = \frac{3 \cdot \frac{5}{7} + 1}{2} = \frac{11}{7}$ e, continuando, $x_3 = \frac{3x_2+1}{2} = \frac{3 \cdot \frac{11}{7} + 1}{2} = \frac{20}{7}$. Agora, temos, $a = 20$ e $b = 7$, e, portanto, como a é par, $x_4 = \frac{x_3}{2} = \frac{10}{7}$. Obtendo o próximo termo, $x_5 = \frac{x_4}{2} = \frac{5}{7}$. Observe que o quinto termo x_5 é igual ao primeiro x_1 .

a) Continuando a sequência acima, podemos afirmar que $x_1 = x_{2017}$? Por quê?

b) Considere uma nova sequência que obedeça as mesmas regras, mas para a qual $x_1 = \frac{23}{37}$. Calcule x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 e x_7 . (Dica: Se você não errar nenhuma conta, verificará que x_7 será igual a x_1 .)

c) Suponha que, para uma outra sequência $x_2 = \frac{3x_1+1}{2}$, $x_3 = \frac{x_2}{2}$ e $x_4 = \frac{x_3}{2}$. Considere ainda que $x_4 = x_1$. Calcule, para essa sequência, o valor de x_1 e o valor de x_{2016} .

PROBLEMA 4

Mathijs Coster - Editor da revista holandesa de Matemática *Pythagoras* – definiu, para um concurso da revista em 2006, um conjunto especial de números que denominaremos *números de Coster*: um número de Coster é um número que você pode obter com as quatro operações (+, −, ×, /) utilizando cada um de seus dígitos exatamente duas vezes. É permitido usar parênteses, mas não é permitido justapor dígitos, por exemplo, com 1 e 2 não podemos formar 12.

Alguns exemplos de números de Coster:

$$\begin{aligned}1 &= 1 \times 1; \\25 &= 5 \times 5 + 2 - 2; \\193 &= 1 + (9 - 1) \times (9 \times 3 - 3); \\256 &= (2 \times 5 + 6) \times (2 \times 5 + 6); \\127.750 &= 5 \times 5 \times 7 \times 2 \times (7 \times (7 \times 7 + 2 + 1) + 1) + 0 + 0\end{aligned}$$

a) Mostre que 36, 145 e 196 são números de Coster.

b) Considere as igualdades a seguir:

$$\begin{aligned}45 &= (4 + 4) \times 5 + 5; \\4545 &= 5 \times (4 + 5) \times (4 \times 5 \times 5 + 4/4); \\454545 &= 5 \times (4 + 5) \times ((4 \times 4 \times 5 \times 5 + 4) \times 5 \times 5 + 4/4);\end{aligned}$$

Demostre que o número de 8 dígitos 45454545 é um número de Coster.

PROBLEMA 5

Napoleão Bonaparte (1769 - 1821) é uma figura histórica muito importante. Ele foi um líder político e militar da França de 1804 até 1815. Nessa questão iremos conhecer uma contribuição de Napoleão para a Matemática.

Vamos mostrar que é possível cobrir o plano com os Triângulos de Napoleão. Ao cobrir o plano, devemos usar cópias de certas figuras sem sobreposição (ou seja, sem colocar uma figura sobre a outra) e sem deixar buracos. Para isso, duas condições são essenciais: segmentos encostados devem ter mesmo comprimento e os ângulos ao redor de cada ponto devem somar exatamente 360° . Por exemplo, é possível cobrir o plano com hexágonos regulares de mesmo lado, conforme a figura 1. Por outro lado, não é possível cobrir com pentágonos regulares, pois os ângulos internos do pentágono regular são iguais a 108° (observe a figura 2) e não é possível obter soma 360° .

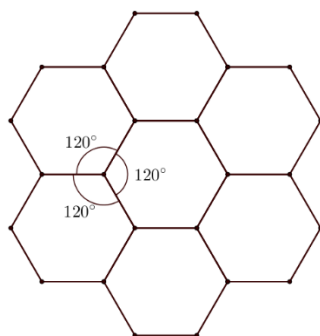


Figura 1



Figura 2

Os Triângulos de Napoleão são formados quando tomamos um triângulo ABC e construímos triângulos equiláteros ABD , BCE e CAF externamente sobre seus lados. Vamos numerar os triângulos ABC , ABD , BCE e CAF com os números 1, 2, 3 e 4, respectivamente, conforme a figura 3 a seguir.

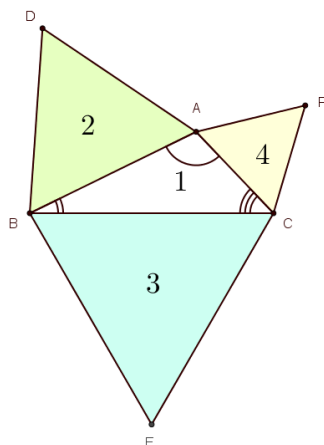


Figura 3

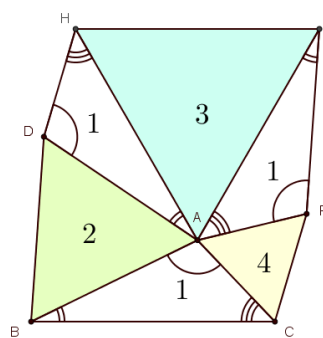


Figura 4

Suponha que ABC possua ângulos internos $m(\widehat{CAB}) = \hat{A} = 110^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = \hat{B} = 30^\circ$ e $m(\widehat{BCA}) = \hat{C} = 40^\circ$ e lados de comprimento $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$.

a) Considere a figura 4 acima, explique por que a soma dos ângulos ao redor do ponto A é 360° .

A figura a seguir é um tridecágono $LMNOPQRSTUVWXYZ$ (polígono de 13 lados). Os comprimentos dos lados estão marcados na figura e os ângulos internos são

$$m(\widehat{LMN}) = \hat{B} + \hat{C} + 60^\circ = 130^\circ$$

$$m(\widehat{MNO}) = \hat{A} + 60^\circ = 170^\circ$$

$$m(\widehat{NOP}) = \hat{C} + 120^\circ = 160^\circ$$

$$m(\widehat{OPQ}) = \hat{B} + 60^\circ = 90^\circ$$

$$m(\widehat{PQR}) = \hat{A} + 60^\circ = 170^\circ$$

$$m(\widehat{QRS}) = \hat{B} + \hat{C} + 120^\circ = 190^\circ$$

$$m(\widehat{RST}) = \hat{A} + 60^\circ = 170^\circ$$

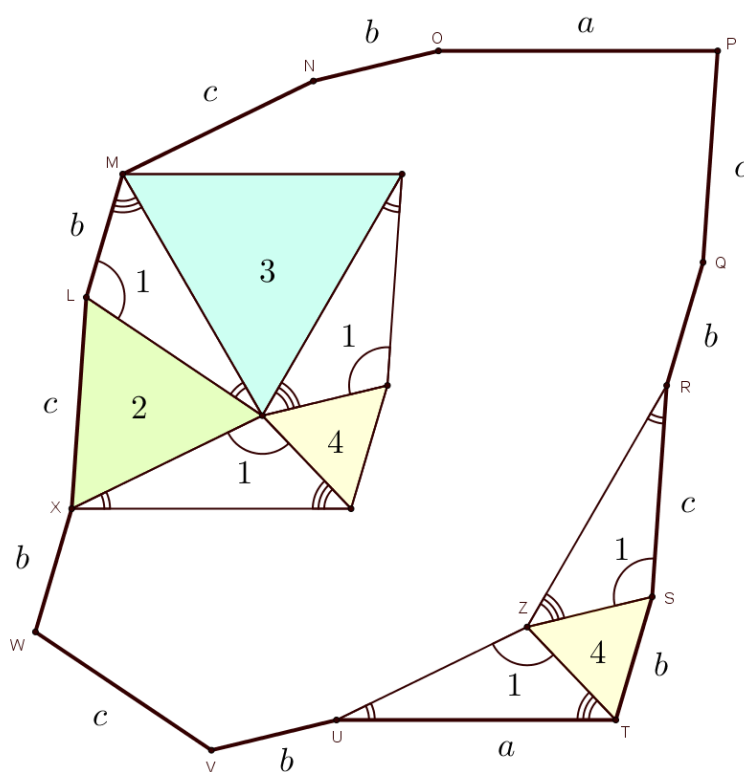
$$m(\widehat{STU}) = \hat{C} + 60^\circ = 100^\circ$$

$$m(\widehat{TUV}) = \hat{A} + \hat{B} + 60^\circ = 200^\circ$$

$$m(\widehat{UVW}) = \hat{B} + \hat{C} + 60^\circ = 130^\circ$$

$$m(\widehat{VWX}) = \hat{A} = 110^\circ$$

$$m(\widehat{WXL}) = \hat{B} + \hat{C} + 120^\circ = 190^\circ$$



Vamos provar que podemos cobrir essa figura com os Triângulos de Napoleão. Já colocamos cinco triângulos 1, um triângulo 2, um triângulo 3 e dois triângulos 4.

b) Determine a medida do ângulo $\widehat{XLM}$.

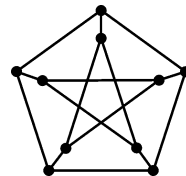
c) Considerando os triângulos SRZ e ZUT de número 1 e o triângulo STZ de número 4. Determine as medidas dos ângulos $\widehat{QRZ}$, $\widehat{RZU}$ e $\widehat{ZUV}$.

d) Complete a cobertura do tridecágono $LMNOPQRSTUVWXYZ$ na folha de respostas usando mais algumas cópias dos Triângulos de Napoleão e justifique por que é possível cobrir o plano. Não esqueça de colocar os números identificando cada triângulo. De preferência, use régua, mas não é necessário se preocupar com a precisão da figura.

XL OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (19 de novembro de 2016)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Na década de 1970, iniciou-se no futebol inglês uma regra que vigora até os dias de hoje praticamente no mundo inteiro: a vitória passou a valer três pontos. A tese era de que com essa regra os times buscariam mais as vitórias, tornando assim as partidas mais disputadas e mais emocionantes para os torcedores, e que geraria mais gols.

É fato que houve um aumento no número de vitórias e também um aumento no número de vitórias por um gol de diferença. Assim, os gols não se tornaram mais abundantes, mas se tornaram mais decisivos e valiosos.

Os times passaram então a analisar seus resultados e calcular quantos pontos, em média, são conquistados por partida em relação ao número de gols marcados na partida. A primeira coisa a se perceber é que um único gol marcado garante, praticamente, um ponto (empate); dois gols deixam o time mais perto da vitória do que do empate; três ou quatro gols aproximam o time mais ainda da vitória, embora não seja garantida; marcar cinco ou mais gols garante, na imensa maioria das vezes, a vitória.

Dessa forma, os especialistas em futebol passaram a perceber que simplesmente somar os gols de um atacante não é a melhor maneira de avaliar a sua produtividade. Gols decisivos, aqueles que podem ser convertidos em vitórias e mais pontos, valem mais do que o terceiro e quarto gols, quando a vitória já está praticamente consumada. E mais, conseguiram modelar essa situação, chegando à conclusão de quantos pontos cada gol gera, em média, em uma determinada partida:

Primeiro gol do time	0,8 ponto
Segundo gol do time	1,0 ponto
Terceiro gol do time	0,6 ponto
Quarto gol do time	0,2 ponto
Quinto gol do time	0,1 ponto

Assim, percebemos que nem todo gol vale a mesma coisa, e que o segundo gol de um time é o mais valioso. Logo, além do total de gols marcados por um jogador, vale a pena calcular o total de pontos gerados pelos gols marcados.

a) Considere os dados de três grandes artilheiros da Série B do Brasileirão 2016 (até a 36ª rodada).

Jogador	Clube	Quantidade de primeiros gols	Quantidade de segundos gols	Quantidade de terceiros gols	Quantidade de quartos gols
Bill Lepo Lepo	Ceará	6	6	2	0
Nenê	Vasco	7	3	2	1
Felipe Garcia	Brasil de Pelotas	9	4	0	0

Veja que Bill Lepo Lepo marcou 14 gols e gerou $6 \times 0,8 + 6 \times 1,0 + 2 \times 0,6 = 12$ pontos. Calcule o número de gols e pontos gerados por Nenê e Felipe Garcia.

b) Analisando o campeonato inglês da temporada 2009/2010, veja como alguns atacantes contribuíram para a pontuação de seus times no campeonato.

Jogador	Número de gols	Pontos gerados
Wayne Rooney	26	20,6
Louis Saha	13	11,3
Cesc Fábregas	15	10,6
Dirk Kuyt	19	7,9

Denominamos *produtividade* o quociente $\frac{\text{Pontos gerados}}{\text{Número de gols}}$. Calcule a produtividade os quatro jogadores acima e coloque-os em ordem crescente de produtividade.

c) Mostre que não é possível que Dirk Kuyt tenha marcado somente primeiros, segundos ou terceiros gols pela sua equipe nas partidas em que participou.

PROBLEMA 2

Mathijs Coster - Editor da revista holandesa de Matemática *Pythagoras* – definiu, para um concurso da revista em 2006, um conjunto especial de números que denominaremos *números de Coster*: um número de Coster é um número que você pode obter com as quatro operações (+, −, ×, /) utilizando cada um de seus dígitos exatamente duas vezes. É permitido usar parênteses, mas não é permitido justapor dígitos, por exemplo, com 1 e 2 não podemos formar 12.

Alguns exemplos de números de Coster:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \times 1; & 25 &= 5 \times 5 + 2 - 2; \\ 193 &= 1 + (9 - 1) \times (9 \times 3 - 3); & 256 &= (2 \times 5 + 6) \times (2 \times 5 + 6); \\ 127.750 &= 5 \times 5 \times 7 \times 2 \times (7 \times (7 \times 7 + 2 + 1) + 1) + 0 + 0 \end{aligned}$$

a) Mostre que 36, 145 e 196 são números de Coster.

b) Um leitor de *Pythagoras* mostrou que existem 1000 números de Coster consecutivos:

$$235667475455989989888abc$$

Considerando que (você não precisa verificar isso!) $235667475455989989888000 =$

$$\begin{aligned} &5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 \times 9 \times 9 \\ &\times (5 \times 7 \times 7 \times 7 - 6) \times (8 \times 8 \times (8 \times (5 \times 8 + 6) + 4) + 5) \\ &\times (9 \times 9 \times (9 + 9 + 3) \times (4 \times 6 \times 6 \times 9 + 4 + 3) - 4) + 8 - 8 \end{aligned}$$

Prove que, ao adicionarmos $5 \times (2 \times 5 \times (a + a) + b + b) + (c + c)/2$ à expressão anterior, com a, b, c dígitos, podemos concluir que, de fato, existem 1000 números de Coster consecutivos.

PROBLEMA 3

O banco de problemas da IMO (International Mathematical Olympiad) consiste nos problemas sugeridos para compor a prova da IMO de cada ano. Os problemas do banco da IMO são interessantes. Vamos estudar um deles, de 2002!

Seja n um inteiro positivo. Uma sequência de n (não necessariamente distintos) inteiros positivos é chamada de **cheia** se satisfaz as seguintes condições: para cada inteiro $k \geq 2$, se o número k aparece na sequência, então $k - 1$ também aparece e a primeira ocorrência de $k - 1$ vem antes da última ocorrência de k . Para cada n , existem quantas sequências cheias com n inteiros?

Um jeito de resolver esse problema é usando uma *bijecção*, isto é, relacionar cada sequência cheia com exatamente um elemento de outro conjunto para o qual sabemos contar sua quantidade de elementos diretamente. Para o nosso problema o outro conjunto será formado pelos tabuleiros $n \times n$ com exatamente n pecinhas, uma em cada linha e uma em cada coluna.

Primeiro, mostraremos que cada configuração de pecinhas gera alguma sequência cheia. Numeramos as linhas e as colunas de 1 a n , na ordem usual. Os números das colunas correspondem a posições na sequência, ou seja, a coluna 1 corresponde ao primeiro número da sequência, a coluna 2 corresponde ao segundo número da sequência, e assim por diante. As linhas determinam os elementos da sequência. A linha 1 corresponde ao elemento 1. Agora, para cada linha subsequente, podemos aumentar em uma unidade ou não o elemento. Se a pecinha nessa linha estiver à direita da pecinha da linha anterior, aumentamos; se estiver à esquerda mantemos o valor.

Por exemplo, para $n = 6$ considere o tabuleiro a seguir.

	1	2	3	4	5	6
1					○	
2						○
3		○				
4				○		
5			○			
6	○					

Começamos na linha 1 escrevendo o elemento 1 na quinta posição. Como a pecinha na linha 2 está à direita da pecinha na linha 1 aumentamos uma unidade e escrevemos 2 na sexta posição. A pecinha na linha 3 está à esquerda da pecinha na linha 2 então mantemos o valor e escrevemos 2 na segunda posição. Seguindo para a linha 4 devemos aumentar o valor e escrever 3 na quarta posição, pois a pecinha está à direita da pecinha na linha 3. As outras duas linhas mostram que os números nas posições 1 e 3 são iguais a 3. Chegamos na sequência (3,2,3,3,1,2) que é cheia!

a) Determine a sequência cheia relacionada com o tabuleiro a seguir.

	1	2	3	4	5	6
1			○			
2				○		
3					○	
4		○				
5	○					
6						○

b) Explique por que toda sequência gerada por uma configuração de n pecinhas é cheia.

A partir da sequência cheia $(2,3,1,2,3,2)$ podemos determinar a configuração relacionada. Primeiro note que o 1 diz que na primeira linha a pecinha deve aparecer na coluna 3. Em relação aos 2 já sabemos que são pecinhas nas colunas 1, 4 e 6. Podemos concluir que na linha 2 aparece uma pecinha na coluna 6.

	1	2	3	4	5	6
1			○			
2						○
3						
4						
5						
6						

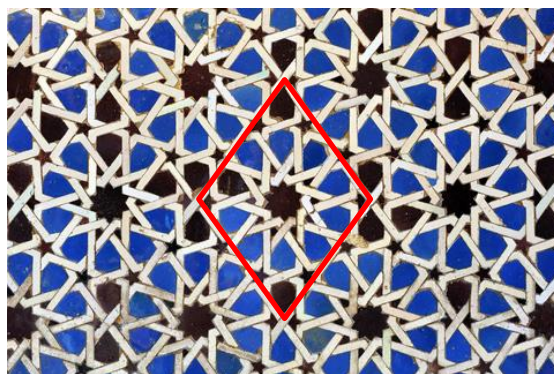
c) Copie o tabuleiro 6×6 acima na *Folha de Respostas* e complete a configuração relacionada com a sequência cheia $(2,3,1,2,3,2)$.

d) Para cada sequência cheia existe uma configuração de n pecinhas. Explique por quê.

e) Determine o número de sequências cheias com 6 termos.

PROBLEMA 4

Os mouros, que são povos do norte da África, habitaram a península ibérica e trouxeram várias influências em diversas áreas do conhecimento e da cultura. Uma delas, na arquitetura, é a decoração em padrões, como o seguinte, que aparece em Sevilha, na Espanha:



(créditos: Josepizarro)

Após uma simplificação, podemos ver que o padrão é a repetição do losango destacado acima. Ele é cortado por dez rotações de 72° do par de retas paralelas que passam por P e Q na figura 1, e mais as seis retas indicadas na figura 3. A determinação das posições de P e Q será vista a seguir. Obtemos assim, uma estrela de dez pontas no centro e partes de estrelas de cinco pontas nas bordas.

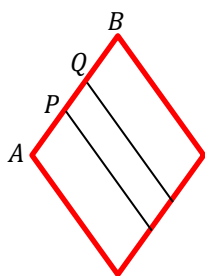


Figura 1

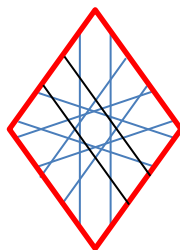


Figura 2

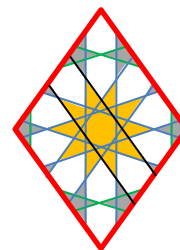
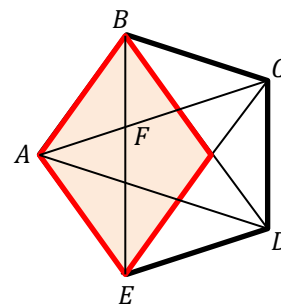


Figura 3

Para obter essas estrelas, usa-se o pentágono regular. De fato, o losango anterior é parte do pentágono ao lado.



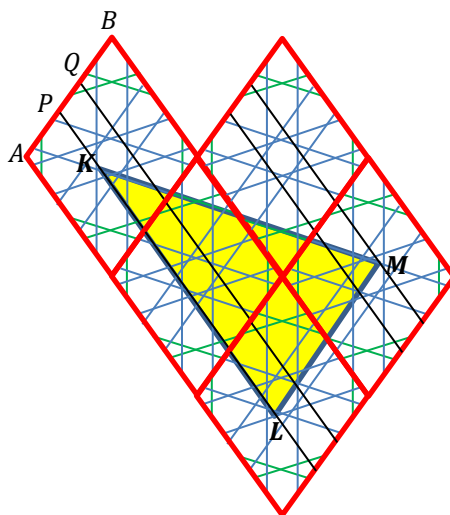
A razão $\frac{BE}{AB}$ é igual à *razão áurea* φ , que é a raiz positiva da equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. De fato, como o ângulo interno do pentágono regular é $\frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$, no triângulo isósceles ABE temos $m(\hat{A}BE) = m(\hat{A}EB) = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$, analogamente $m(\hat{B}AC) = 36^\circ$, e no triângulo AFE temos $m(\hat{E}AF) = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ e $m(\hat{A}FE) = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$, ou seja, AFE é isósceles com $FE = AE$. Finalmente, note que FAB e ABE são semelhantes, de modo que

$$\frac{BF}{AE} = \frac{AB}{BE} \Leftrightarrow \frac{BE - AB}{AB} \cdot \frac{BE}{AB} = 1 \Leftrightarrow (\varphi - 1)\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Essa razão também aparece na hora de determinar as posições dos pontos P e Q . Sendo $AP = QB$, basta encontrar a razão $\frac{AP}{PQ}$. Mostraremos que

$$\frac{AP}{PQ} = \varphi.$$

Para isso, considere as cinco cópias do losango a seguir e o triângulo destacado KLM , em que K e L são pontos correspondentes dos decágonos centrais de dois losangos, LM é paralelo a AB , e M é um vértice do decágono central de um terceiro losango. Observe que KL e KM estão sobre algumas das retas da figura 2 que cortam os losangos.



- Calcule os ângulos internos do triângulo KLM .
- Explique por que $KL = 2AB$ e por que $LM = 2PB$.
- Calcule $\frac{AB}{PB}$.
- Observando que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, mostre que $1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}$.
- Mostre que $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{\varphi^2}$ e conclua que $\frac{AP}{PQ} = \varphi$.

PROBLEMA 5

Nós dizemos que $\frac{1}{Q}$ é uma *fração k – primal* se existem números inteiros positivos $a_1, a_2, \dots, a_k$ com $Q = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_k$ e $\frac{1}{Q} = \frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_2} \pm \dots \pm \frac{1}{a_k}$ (para uma escolha adequada de sinais $\pm$). Por exemplo, $\frac{1}{630}$ é uma fração 3 – primal, pois $630 = 5 \times 7 \times 18$ e $\frac{1}{630} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{18}$.

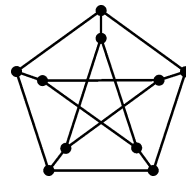
- Mostre que toda fração da forma $\frac{1}{n(n+1)}$, com n inteiro positivo, é 2 – primal.
- Utilizando o item anterior, mostre que $\frac{1}{1806}$ é 5 – primal.
- Suponha que $\frac{1}{abc}$ seja uma fração 3 – primal com $\frac{1}{abc} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$. Prove que $\frac{1}{(c)(2c-a)(2c+b)}$ também é 3 – primal com $\frac{1}{(c)(2c-a)(2c+b)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{2c-a} - \frac{1}{2c+b}$.
- A sequência de Fibonacci é definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 0$, ou seja, a partir de F_2 cada termo da sequência é a soma dos dois anteriores. Os primeiros termos da sequência de Fibonacci são, portanto, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
Sejam $a = F_n$, $b = F_{n+1}$ e $c = F_{n+2}$. Mostre que $2c - a = F_{n+3}$ e $2c + b = F_{n+4}$.

- Demostre, utilizando os itens c e d, que $\frac{1}{F_{2016} \cdot F_{2017} \cdot F_{2018}}$ é 3 – primal.

XL OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (19 de novembro de 2016)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

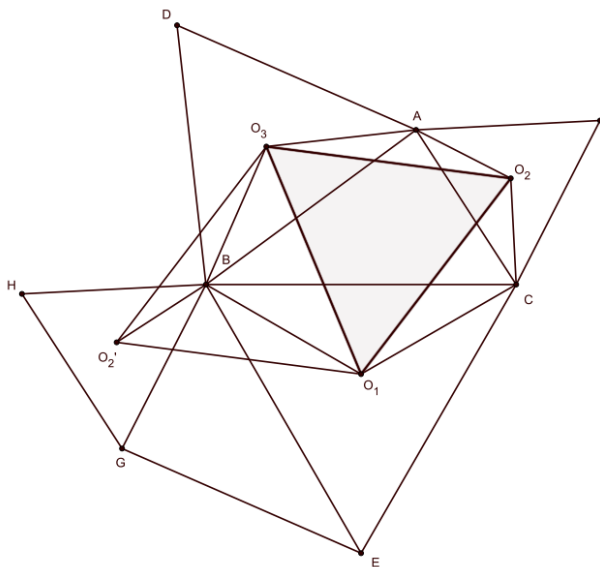
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Napoleão Bonaparte (1769 - 1821) é uma figura histórica muito importante. Ele foi um líder político e militar da França de 1804 até 1815. Apesar de Napoleão ser muito conhecido, muitas pessoas não conhecem o Teorema de Napoleão.

O Teorema de Napoleão afirma que se tomarmos um triângulo qualquer e construirmos três triângulos equiláteros externamente sobre seus lados então os centros desses três triângulos equiláteros são vértices de um triângulo equilátero. Nesse problema, você vai provar o Teorema de Napoleão. Os historiadores não têm certeza se o Napoleão realmente provou esse teorema que leva seu nome. Agora você deve pensar “se não sabem nem se Napoleão conseguiu provar, como eu vou fazer isso?”. Não se preocupe! Nós vamos ajudá-lo!

Considere um triângulo ABC e triângulos equiláteros ABD , BCE e CAF construídos externamente sobre seus lados. Sejam O_1 , O_2 e O_3 os centros dos triângulos BCE , CAF e ABD , respectivamente. Construimos sobre o lado BE o triângulo GEB congruente ao triângulo ABC e sobre o lado BG mais um triângulo equilátero BGH de centro O_2' .



Como pensamos nisso? Uma propriedade curiosa dos triângulos do Teorema de Napoleão é que podemos cobrir todo o plano usando apenas cópias desses triângulos. Para mais detalhes você pode olhar a prova do nível alfa.

- Prove as seguintes congruências de triângulos: $\Delta O_2 A O_3 \cong \Delta O_2' B O_3$ e $\Delta O_2 C O_1 \cong \Delta O_2' B O_1$.
- Prove que $\angle O_2 O_1 O_2' = \angle O_2 O_3 O_2' = 120^\circ$. Você não pode usar que o triângulo $O_1 O_2 O_3$ é equilátero. Nós não demonstramos isso ainda!
- Conclua a demonstração do Teorema de Napoleão provando que $\Delta O_1 O_2 O_3$ é equilátero.

PROBLEMA 2

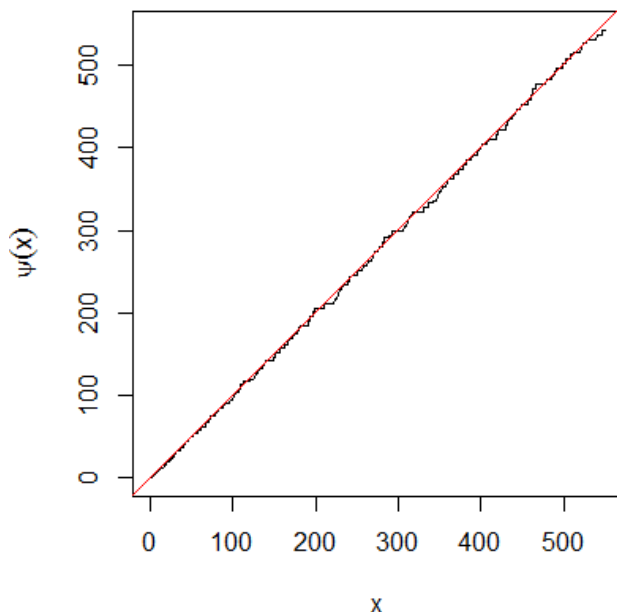
Sendo p um número primo positivo e x um número real positivo, $T_p(x)$ é igual ao número de potências de p , com expoente positivo, menores ou iguais a x , ou seja, ela conta as potências de um determinado primo. Por exemplo, $T_5(30) = 2$, pois as potências de 5 menores ou iguais a 30 são 5 e 25.

Por volta de 1850, o matemático russo Pafnuti Chebyshev criou a função $\psi(x)$ (ψ é a letra grega psi). Ela conta as potências de todos os primos menores ou iguais a x , porém tais potências são contadas com peso $\ln p$.

Por exemplo, tomemos $x = 20$. As potências de primos menores ou iguais a 20 são 2, 4, 8, 16 (potências de 2); 3, 9 (potências de 3) e os números primos 5, 7, 11, 13, 17, 19. Assim, para calcular $\psi(20)$, nós precisamos contar as quatro potências de 2 com peso $\ln 2$, as duas potências de 3 com peso $\ln 3$ e cada um dos outros seis primos com um peso que é o seu próprio logaritmo natural. Ou seja:

$$\begin{aligned}\psi(20) &= (T_2(20) \times \ln 2) + (T_3(20) \times \ln 3) + (T_5(20) \times \ln 5) + (T_7(20) \times \ln 7) + \\ & (T_{11}(20) \times \ln 11) + (T_{13}(20) \times \ln 13) + (T_{17}(20) \times \ln 17) + (T_{19}(20) \times \ln 19) = \\ & 4 \ln 2 + 2 \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 + \ln 11 + \ln 13 + \ln 17 + \ln 19 \approx 19,266\end{aligned}$$

O valor é aproximadamente 20 e não é coincidência: a função $\psi(x)$ é aproximadamente igual a x . Veja o gráfico a seguir:



a) Prove que $\log_p(x) - 1 < T_p(x) \leq \log_p(x)$.

b) Considerando o item anterior podemos dizer que $T_p(x)$ é, aproximadamente, igual a $\log_p x$. Utilizando tal aproximação, mostre que $\psi(x)$ é, aproximadamente, igual a $\pi(x) \cdot \ln x$, em que $\pi(x)$ é função que representa o número de primos positivos menores ou iguais a x .

c) Utilizando as informações oferecidas na questão estime o valor de $\pi(500)$, dado que $\ln 2 \approx 0,69$ e $\ln 5 \approx 1,60$. Ou seja, você deve estimar o número de primos positivos menores do que 500.

Nessa questão talvez você deseje usar a fórmula de mudança de base dos logaritmos: sendo a , b e c maiores do que 0 e diferentes de 1:

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$$

Observação: a função $\ln x$ representa o logaritmo de x na base e .

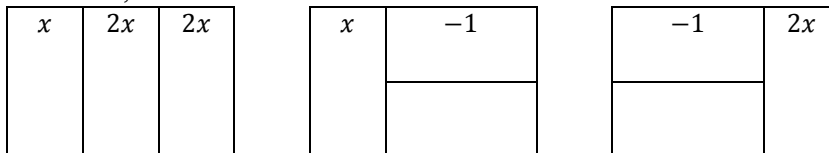
PROBLEMA 3

Os polinômios de Chebyshev, denotados por T_n , são aqueles que satisfazem a identidade trigonométrica $\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$. Por exemplo, como $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, temos $T_2(x) = 2x^2 - 1$, e sendo $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.

Agora considere as divisões de um tabuleiro $2 \times n$ em dominós. Por exemplo, para $n = 3$ há as seguintes três possibilidades:



Agora, associe a cada par de dominós horizontais o número -1 e a cada dominó vertical o número $2x$ exceto quando o dominó está na extrema esquerda. Nesse caso, associamos x .



Em seguida, calculamos os produtos dos números em cada divisão e somamos os monômios obtidos: $x \cdot 2x \cdot 2x + x \cdot (-1) + (-1) \cdot 2x = 4x^3 - 3x = T_3(x)$. Coincidência?? Veremos que não!

a) Utilizando a fórmula de Prostaferese $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, mostre que $T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$.

b) Sendo $A_n(x)$ a soma dos monômios correspondentes às divisões de um tabuleiro $2 \times n$. Calcule $A_1(x)$ e $A_2(x)$. Não se esqueça de fazer os desenhos e marcar seus valores associados!

c) O que acontece com os monômios correspondentes a cada divisão se colocamos um dominó vertical à sua direita?

d) Explique por que $A_n(x) = 2x \cdot A_{n-1}(x) - A_{n-2}(x)$ e conclua que $A_n(x) = T_n(x)$ para todo n inteiro positivo. Não era coincidência!

PROBLEMA 4

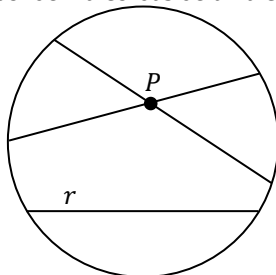
A geometria que estudamos é conhecida como *geometria euclidiana*. Existem outros tipos de geometria, que são estudados em outros contextos, como a *geometria hiperbólica*, que tem aplicações, por exemplo, em teoria da relatividade restrita.

A principal diferença entre a geometria hiperbólica e a geometria euclidiana é o postulado das paralelas, que é mudado para

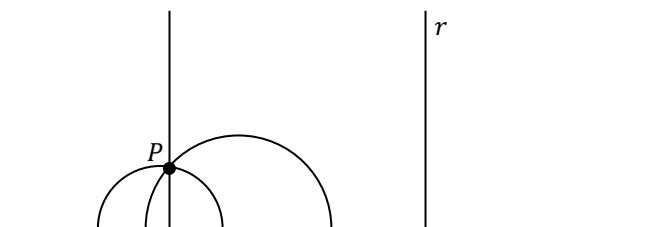
Para qualquer reta r e um ponto P fora de r , existem no mesmo plano de P e r pelo menos *duas* retas que passam por P e não cortam r .

A questão agora é como visualizar a geometria hiperbólica para refletir esse novo postulado. Isso inclui representar retas com curvas e representar um plano com um círculo ou um semiplano. Por isso, vários modelos para representar o plano hiperbólico foram desenvolvidos. Dois deles são:

- O *modelo de Klein*, em que as retas correspondem a cordas de uma circunferência.



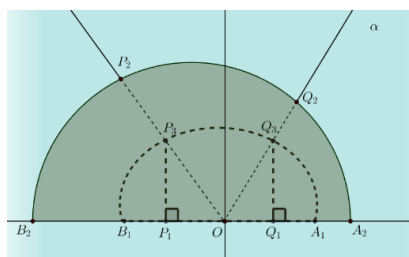
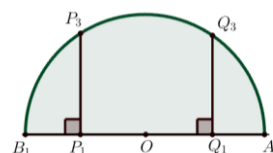
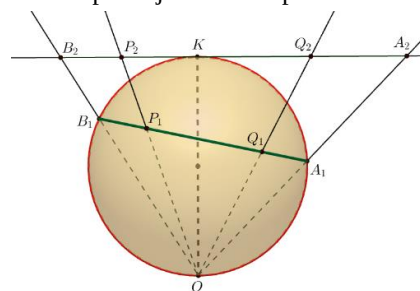
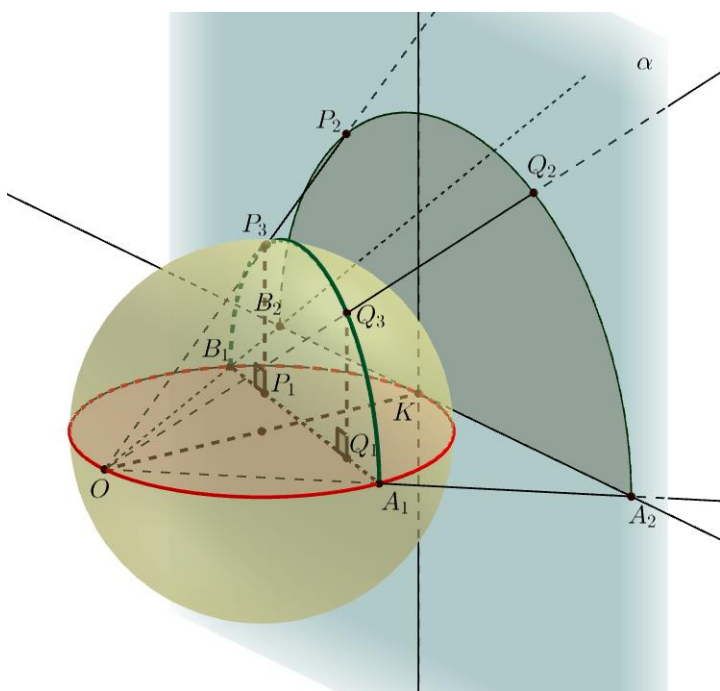
- O *semiplano de Poincaré*, em que as retas correspondem a semirretas ortogonais ou semicircunferências no interior de um semiplano.



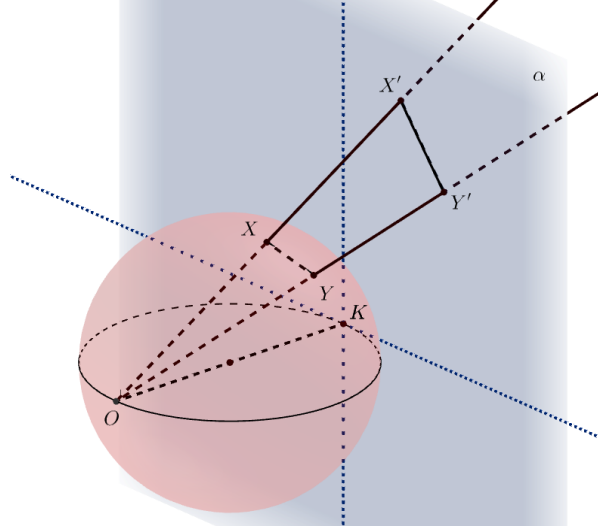
Como sabemos que os modelos correspondem à mesma geometria? Uma maneira é utilizar o *modelo do hemisfério*, em que as retas são representadas por secções de planos no hemisfério. Diversos tipos de projeções mostram as relações entre as geometrias. Vamos mostrar uma relação entre o modelo de Klein e o semiplano de Poincaré.

Considere uma circunferência de diâmetro OK representando o modelo de Klein e uma “reta” A_1B_1 . Os pontos sobre a corda A_1B_1 são projetados no hemisfério superior da esfera de diâmetro OK fornecendo um arco de extremos A_1 e B_1 . Em seguida, esse arco é projetado sobre um plano α e como resultado tem-se uma semicircunferência C no semiplano superior do plano α ; C é uma “reta” no semiplano de Poincaré correspondente. Note que cada “reta” (corda) do modelo de Klein está relacionada com uma “reta” (semicircunferência ou semirreta) no semiplano de Poincaré.

As figuras a seguir mostram um exemplo de “reta” A_1B_1 no modelo de Klein, a “reta” A_2B_2 no semiplano de Poincaré correspondente e as projeções descritas. As figuras menores são pontos de vista diferentes para ajudar a compreensão.



A figura a seguir representa uma esfera de diâmetro OK e um plano α perpendicular à OK que passa por K . Para cada ponto $X \neq O$ na superfície da esfera marca-se o ponto X' onde a reta OX fura o plano α .

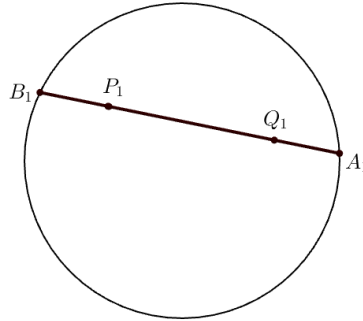


- a) Prove que os triângulos OXK e $OX'K$ são semelhantes e conclua que $OX \cdot OX' = OK^2$.
b) Considere mais um ponto Y na superfície da esfera e o ponto Y' onde OY fura o plano α . Prove que

$$X'Y' = \frac{OK^2 \cdot XY}{OX \cdot OY}.$$

Considerando que os modelos têm distorções de distâncias, usamos fórmulas diferentes para calcular distâncias hiperbólicas. No modelo de Klein, a distância hiperbólica entre dois pontos P_1 e Q_1 é dada por

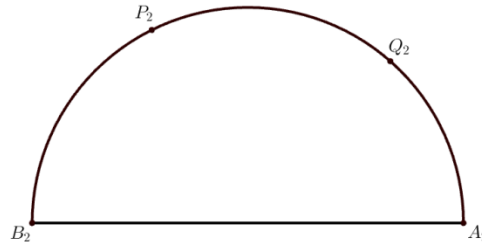
$$d_{\text{Klein}}(P_1, Q_1) = \frac{1}{2} \ln \frac{A_1 Q_1 \cdot P_1 B_1}{A_1 P_1 \cdot Q_1 B_1}.$$



Nessa fórmula, os segmentos $A_1 Q_1$, $P_1 B_1$, $A_1 P_1$ e $Q_1 B_1$ possuem comprimentos usuais de geometria euclidiana.

Usando a correspondência do modelo do hemisfério, podemos relacionar os pontos P_1 e Q_1 aos pontos P_2 e Q_2 , respectivamente. No semiplano de Poincaré, a distância é calculada usando

$$d_{\text{Poincaré}}(P_2, Q_2) = \ln \frac{A_2 Q_2 \cdot P_2 B_2}{A_2 P_2 \cdot Q_2 B_2}.$$

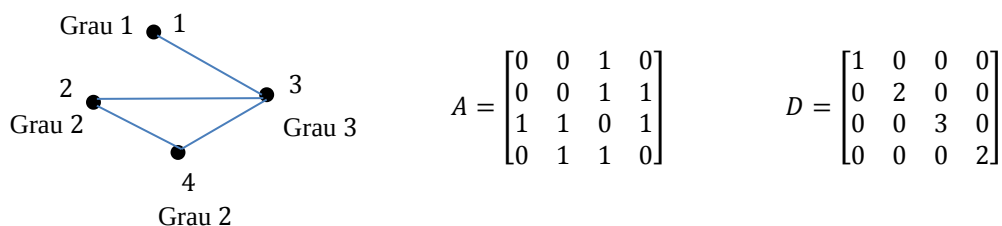


- c) Prove que $d_{\text{Klein}}(P_1, Q_1) = d_{\text{Poincaré}}(P_2, Q_2)$, ou seja, prove que
- $$\ln \frac{A_2 Q_2 \cdot P_2 B_2}{A_2 P_2 \cdot Q_2 B_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{A_1 Q_1 \cdot P_1 B_1}{A_1 P_1 \cdot Q_1 B_1}.$$

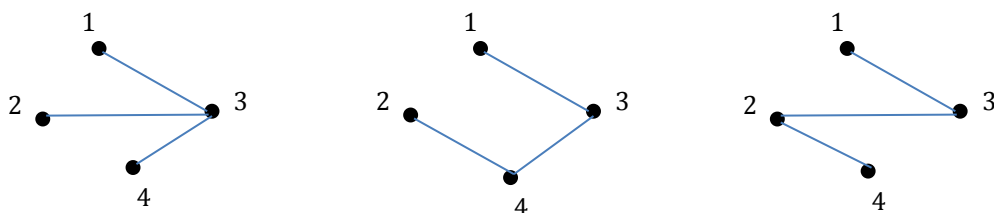
Observação: a função $\ln x$ representa o logaritmo de x na base e .

PROBLEMA 5

Grafos têm várias aplicações em computação e matemática. Um grafo é um par de conjuntos; um deles é o conjunto de *vértices*, que costumamos representar por pontos e o outro é o conjunto de *arestas*, que ligam pares de vértices. A quantidade de arestas que passam por um vértice v é o *grau* de v . Podemos organizar as arestas e os graus em matrizes. A *matriz dos graus* D é uma matriz cujos elementos na diagonal são os graus dos vértices e a *matriz de adjacência* A é definida por $a_{ij} = 1$ se os vértices i e j estão ligados por uma aresta e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Na figura a seguir, temos um grafo, com graus indicados, a matriz dos graus D e a matriz de adjacência A correspondentes.



Note que há várias maneiras de interpretar um grafo; uma delas, por exemplo, é uma rede de computadores. Uma maneira que utiliza o mínimo de arestas para conectar todos os computadores é uma *árvore*. Uma árvore com arestas contidas no conjunto de arestas de um grafo é uma *árvore geradora*. O grafo que acabamos de ver tem 3 árvores geradoras:



Dois problemas importantes são saber a quantidade de árvores geradoras e como gerar árvores geradoras. O primeiro problema foi resolvido por Gustav Kirchhoff no século XIX, e o segundo problema tem várias soluções. Uma delas foi obtida por David Wilson em 1996. Greg Lawler, em 1999, obteve uma outra demonstração que conecta os dois problemas!

Essa demonstração tem dois ingredientes: um deles é a noção de *caminhos aleatórios*, e outra é uma propriedade de determinantes.

Primeiro, descrevemos o algoritmo para obter árvores geradoras.

- I. Escolhemos um vértice v qualquer do grafo e numeramos os demais por $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- II. Começamos uma caminhada aleatória em x_1 , ou seja, escolhemos uma aresta qualquer que sai de x_1 , andamos para o vértice na outra extremidade da aresta escolhida y_1 , escolhemos ao acaso outra aresta qualquer que sai de y_1 (incluindo $y_1 x_1$), andamos para o próximo vértice, e assim por diante, até chegar a v . Cortamos todos os loops que formamos nesse processo, e obtemos um caminho de x_1 a v .
- III. Tomamos o vértice x_i com menor índice que não está conectado e começamos outro caminho aleatório até chegar a um vértice já conectado. Novamente, cortamos os loops.
- IV. Repetimos o passo III até acabarem os vértices.

O principal resultado desse algoritmo é que ele seleciona cada árvore geradora com a mesma probabilidade, ou seja, cada árvore geradora tem a mesma chance de ser obtida.

Vamos calcular algumas probabilidades. Note que a probabilidade de usar uma aresta xy dado que estamos no vértice x é $\frac{1}{d(x)}$, em que $d(x)$ é o grau de x . Ou seja, se y está ligado a x a probabilidade de ir de x a y é $\frac{1}{d(x)}$ e 0 se y não está ligado a x .

a) Mostre que o elemento p_{ij} da matriz $P = D^{-1}A$ é a probabilidade de ir diretamente do vértice i ao vértice j .

No nosso algoritmo, nós paramos se chegamos a algum vértice de um conjunto Δ de vértices. Nesse caso, a probabilidade de ficar no vértice é 1 e a probabilidade de sair dele é zero. Nesse caso, trocamos p_{ii} por 1 e p_{ij} e p_{ji} por 0 para $j \neq i$. Supondo que esses vértices são os de menores índices, a nossa matriz de probabilidade muda para

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & P_\Delta \end{bmatrix},$$

em que $[I \ 0]$ indica a identidade e a matriz nula para os vértices finais e $[R \ P_\Delta]$ indica os valores da matriz P correspondentes aos outros vértices.

Em probabilidade, uma *variável aleatória discreta* X é um conjunto de valores, cada um deles atrelado a uma probabilidade; o seu *valor esperado* $E(X)$ é a média aritmética obtida ao fazer muitos sorteios dessa variável, de acordo com suas probabilidades, e é igual a $E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$.

Agora, considere a matriz G cujo elemento g_{ij} é o valor esperado da quantidade de visitas a um vértice j de um caminho aleatório que começa em i e termina em algum vértice de Δ .

b) Considerando o primeiro passo do caminho, mostre que

$$g_{ii} = 1 + \sum_{z \notin \Delta} p_{iz} g_{zi} \text{ e, para } i \neq j, \quad g_{ij} = \sum_{z \notin \Delta} p_{iz} g_{zj}$$

e conclua que $G = I + Q \cdot G$.

A conta anterior mostra que $G = (I - Q)^{-1}$.

c) Considerando que $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$, sendo r_i a probabilidade de um caminho que começa em i voltar a i , prove que $g_{ii} = \frac{1}{1-r_i}$.

d) Prove que a probabilidade de o caminho $(i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1})$ fazer parte da árvore geradora no algoritmo é

$$\prod_{k=1}^m \frac{1}{d(i_k)} \cdot g_{i_k i_{k+1}}^{\Delta_k},$$

em que $g_{i_k i_{k+1}}^{\Delta_k}$ é o elemento (i_k, i_{k+1}) da matriz G correspondente ao processo em que paramos se chegamos a um vértice de $\Delta_k = \Delta \cup \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$ (se $k = 1$ usamos $\Delta_1 = \Delta$).

Com isso, podemos concluir que a probabilidade de obter uma árvore $\mathcal{A}$ a partir dos t caminhos $(i_{1,1} i_{1,2} \dots i_{1,m_1+1})$, $(i_{2,1} i_{2,2} \dots i_{2,m_2+1})$, ..., $(i_{t,1} i_{t,2} \dots i_{t,m_t+1})$, nessa ordem, é

$$P(\mathcal{A}) = \prod_{\ell=1}^t \prod_{k=1}^{m_\ell} \frac{1}{d(i_{\ell,k})} \cdot g_{i_{\ell,k} i_{\ell,k+1}}^{\Delta_{\ell,k}},$$

em que $\Delta_{\ell,k}$ é obtido unindo o vértice $i_{\ell,k-1}$ a Δ , e começando inicialmente com $\Delta = \{v\}$.

Finalmente, para o final, usamos uma propriedade de determinantes. No que se segue, $(A)_{ij}$ é o elemento na linha i e coluna j da matriz A . A regra de Cramer nos permite provar a *fórmula da adjunta*, que diz que o termo $(M^{-1})_{ii}$ da inversa de uma matriz (invertível) M é dado por $(M^{-1})_{ii} = \frac{\det M_i}{\det M}$, em que M_i é a matriz obtida eliminando a linha i e a coluna i . Por exemplo, numa matriz 2×2 dada por $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$$(M^{-1})_{11} = \frac{d}{ad - bc} = \frac{\det[d]}{\det M} = \frac{\det M_1}{\det M},$$

e observando que $\frac{1}{d} = d^{-1} = (M_1^{-1})_{22}$ é o elemento da linha original 2 e coluna original 2 da matriz M depois de eliminarmos a linha 1 e a coluna 1, podemos concluir que

$$\frac{1}{\det M} = \frac{(M^{-1})_{11}}{d} = (M^{-1})_{11} \cdot (M_1^{-1})_{22}$$

e) Generalize essa ideia para provar que, para uma matriz M de ordem n , e sendo $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ uma permutação de $(1, 2, 3, \dots, n)$,

$$\frac{1}{\det M} = \prod_{k=1}^n (M_{\Delta_k}^{-1})_{i_k i_k},$$

em que M_{Δ_k} é a matriz eliminando as linhas e colunas $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$, e $M_{\Delta_1} = M$.

f) Prove que

$$P(\mathcal{A}) = \prod_{\ell=1}^t \prod_{k=1}^{m_\ell} \frac{1}{d(i_{\ell,k})} \cdot g_{i_{\ell,k} i_{\ell,k+1}}^{\Delta_{\ell,k}} = \det(D^{\{v\}^{-1}} G^{\{v\}}),$$

em que $G^{\{v\}}$ é a matriz obtida sendo v o único vértice em que o processo termina.

g) Conclua os nossos dois problemas, ou seja, mostre que a probabilidade de a árvore $\mathcal{A}$ ser escolhida não depende da ordem dos vértices e que o número de árvores é $\det((D - A)^{\{v\}})$.