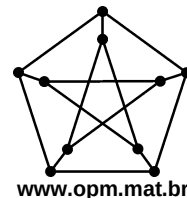


XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (10 de agosto de 2019)

Instruções Gerais



Caro Responsável,

Este é o material referente à Primeira Fase da XLIII Olimpíada Paulista de Matemática, a OPM-2019, que deve ser realizada no dia 10 de agosto, às 8h. Caso seja necessário, pode-se iniciar a prova, no máximo, até as 9h. Fique atento:

I) A duração da prova é de 3h30min.

II) É necessário providenciar cópias das provas e também as *Folhas de Respostas*, que podem ser papel almaço ou sulfite. Não há um modelo oficial para as *Folhas de Respostas*. Os estudantes devem resolver a prova apenas nas *Folhas de Respostas*.

Os estudantes devem colocar em suas *Folhas de Respostas* os seguintes dados pessoais:

- nome completo,
- nível (α , β ou γ),
- ano/série,
- nome da escola, dizendo se é particular ou pública,
- telefone para contato,
- e-mail (caso possua),
- data de nascimento.

III) Os gabaritos e os critérios de correção estarão disponíveis para todos os interessados em nossa página <http://www.opm.mat.br> a partir de 13 de agosto, terça-feira, para visualização e impressão.

IV) A partir de 13 de agosto, terça-feira, estará disponível em nossa página

http://www.opm.mat.br/relatorio2019primeirafase

o *Relatório de Desempenho dos Estudantes* na Primeira Fase da OPM. **Atenção:** é necessário digitar em seu navegador o endereço acima, pois não há link para ele em nossa página. Para poder acessar, preencher e enviar o relatório, deverão ser usados o mesmo número de inscrição e a mesma senha enviados para baixar as provas. Caso não os tenha, escreva para info@opm.mat.br, solicitando-os.

No *Relatório de Desempenho dos Estudantes* deverão ser relacionados, em ordem decrescente de notas, os cinco estudantes que obtiveram melhor desempenho em cada um dos níveis. Esclarecemos que estes estudantes estarão apenas INDICADOS para a Fase Final, mas que ainda **NÃO** estarão classificados para a Fase Final. Salientamos ainda que cada escola pode indicar no máximo 5 estudantes em cada nível. Não há exceções. Havendo empate, caberá ao responsável decidir quais serão os indicados.

Após receber o *Relatório de Desempenho dos Estudantes* na Primeira Fase de cada uma das escolas participantes, a Comissão Organizadora da OPM irá analisá-los e então divulgará, apenas no site da OPM, a *Lista de Convocados para a Fase Final*, sendo este o único instrumento válido de convocação. Assim recomendamos que nenhum resultado seja antecipadamente divulgado.

As provas dos indicados no *Relatório de Desempenho dos Estudantes* na Primeira Fase deverão ser guardadas até a realização da Fase Final, podendo ser requisitadas a qualquer momento para análise.

Muita atenção: o prazo final para o preenchimento e envio do *Relatório de Desempenho dos Estudantes* na Primeira Fase é 23 de agosto, sexta-feira.

V) A *Lista de Convocados para a Fase Final* estará no site da OPM a partir de 3 de setembro, terça-feira. A Fase Final será realizada no dia 5 de outubro, às 8h, no Campus da USP – Cidade Universitária, em São Paulo. A premiação acontecerá no mesmo dia, a partir das 16h30min, em São Paulo.

Qualquer irregularidade deve ser imediatamente comunicada: nosso e-mail é info@opm.mat.br

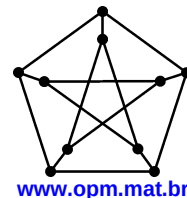
Boa sorte a todos. E agradecemos pela sua colaboração.

Comissão Organizadora – OPM 2019.

XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (10 de agosto de 2019)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

- Instruções:**
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
 - Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
 - Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
 - Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
 - Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
 - Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

O recorde de subida de escadas em um período de 12 horas é de *Christian Riedl*. Foi obtido na *Torre 185*, um prédio de escritórios em Frankfurt – Alemanha, no dia 28 de setembro de 2014.

Reidl subiu os 988 degraus do prédio 71 vezes (ele fez todas as descidas de elevador), totalizando 13.145,65 metros de subida.

- Quantos degraus ele subiu ao todo?
- Calcule a altura de um degrau. Considere que todos os degraus possuem a mesma altura.
- Estime a altura da Torre 185. (fez sentido? ☺)
- Quantos degraus ele subiu por segundo, em média?

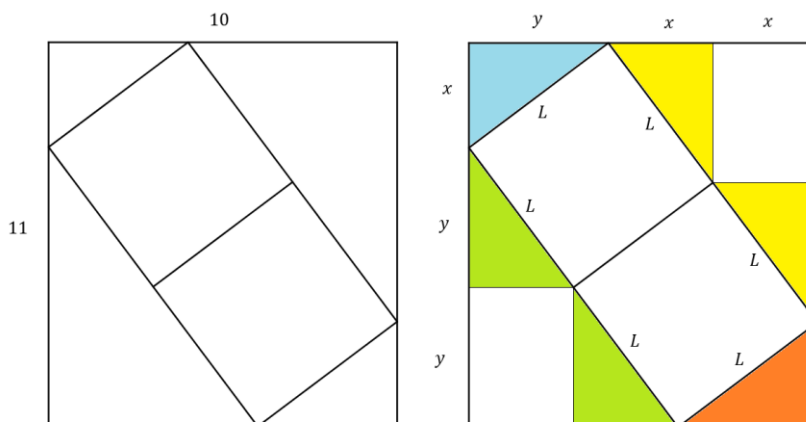
PROBLEMA 2

Contaremos agora quantos são os números com seis algarismos, sendo 2 uns, 2 dois e 2 três, de modo que não haja dois algarismos seguidos iguais. O número 123213 deve ser contado, mas 123312 não deve.

- Se o primeiro algarismo é 1, o segundo é 2, e o terceiro é 1, (ou seja, o número é 121_ _ _), todos os outros estão determinados. Coloque o número completo na sua folha de resposta.
- Se o primeiro algarismo é 1, o segundo é 2, e o terceiro é 3, (ou seja, o número é 123_ _ _), há mais quatro possibilidades para o número. Liste essas quatro possibilidades (*Dica*: um deles já apareceu no enunciado!).
- Observe os números 123213, 132312, 213123, 231321, 312132 e 321231. Eles têm um aspecto em comum: os dígitos de um tipo aparecem nas centenas de milhares e nas dezenas (primeiro e quinto dígitos da esquerda para a direita), os dígitos de outro tipo aparecem nas dezenas de milhares e centenas (segundo e quarto dígitos da esquerda para a direita), e os dígitos do último tipo aparecem nos milhares e nas unidades (terceiro e sexto dígitos da esquerda para a direita).
A partir dessa observação, encontre a quantidade de números de seis algarismos, sendo 2 uns, 2 dois e 2 três, de modo que não haja dois algarismos seguidos iguais.

PROBLEMA 3

Os *poliminós* são pecinhas formadas por quadradinhos de mesmo lado, usadas em jogos e quebra-cabeças. Os nomes dos poliminós são indicados pelo número de quadradinhos usados para montá-los. Por exemplo, os dominós são formados por dois quadradinhos e os pentaminós são formados por cinco quadradinhos. As figuras a seguir mostram um dominó formado por dois quadradinhos de lado L inscrito num retângulo de dimensões 10×11 . Vamos mostrar como determinar a medida L .



- Traçam-se linhas horizontais e verticais passando pelos vértices que formam o dominó. Assim, são formados 6 triângulos retângulos com lados x , y e L . A partir dos comprimentos dos segmentos horizontais, $y + 2x = 10$. Quanto vale $2y + x$?
- Mostre que a área do retângulo grande é igual a $2L^2 + 5xy$.
- Calcule x , y e L .

PROBLEMA 4

Para usar o método tradicional de multiplicação, escrevemos os dois números, alinhando os dígitos de cada casa decimal. Multiplicamos dígito por dígito, colocando os zeros correspondentes às posições, e somamos todos os resultados. A seguir, temos um exemplo de multiplicação de números de dois dígitos. Veja que são feitas 4 multiplicações e algumas adições.

Método tradicional para multiplicar 25×63

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 63 \\ \hline 1200 \\ + \\ \times 25 \\ 63 \\ \hline 15 \\ + \\ \times 25 \\ 63 \\ \hline 60 \\ + \\ \times 25 \\ 63 \\ \hline 300 \\ \hline 1575 \end{array}$$

O método de Karatsuba de multiplicação foi criado pelo matemático soviético Anatoly Karatsuba, em 1960, quando ele tinha apenas 23 anos. A seguir, temos um exemplo da aplicação do método de Karatsuba para a multiplicação de números de dois dígitos. Nesse método são feitas 3 multiplicações e algumas adições e subtrações. No passo A, separamos os dígitos. Nos passos B e C, multiplicamos as dezenas e as unidades. No passo D, somamos os dígitos de cada número. No passo E, multiplicamos as somas obtidas em D. No passo F, subtraímos do número obtido em E os números obtidos em B e C. Finalmente, no passo G, adicionamos os números obtidos considerando as casas decimais correspondentes.

Figura 1: Método de Karatsuba para multiplicar 25×63

$$\begin{array}{l} \textcircled{\text{A}} \quad \begin{array}{l} 25 \rightarrow \boxed{2} \boxed{5} \\ 63 \rightarrow \boxed{6} \boxed{3} \end{array} \quad \textcircled{\text{B}} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \times 6 \\ \hline 12 \end{array} \quad \textcircled{\text{C}} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \times 3 \\ \hline 15 \end{array} \quad \textcircled{\text{D}} \quad \begin{array}{r} 2+5=7 \\ 6+3=9 \end{array} \quad \textcircled{\text{E}} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \times 9 \\ \hline 63 \end{array} \quad \textcircled{\text{F}} \quad \begin{array}{r} 63 \\ - 15 \\ - 12 \\ \hline 36 \end{array} \quad \textcircled{\text{G}} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 36 \\ + 15 \\ \hline 1575 \end{array}$$

a) Aplique o método de Karatsuba para fazer a multiplicação 61×36 . Indique cada passagem, como no exemplo acima.

b) Verifique que $(10a + b)(10c + d) = 100ac + bd + 10[(a + b)(c + d) - (ac + bd)]$. Por que essa identidade justifica o método de Karatsuba?

Essa diferença na quantidade de multiplicações se torna cada vez maior. Chamaremos uma multiplicação de *simples* quando envolve dois números de 1 até 9, como nos passos B e C na figura 1, ou quando envolve dois números de 1 até 18, como pode ocorrer no passo E na figura 1. A seguir, fazemos uma mesma multiplicação de números de quatro dígitos usando os dois métodos de multiplicação. Usando o método tradicional, são feitas 16 multiplicações simples e, usando o método de Karatsuba, são feitas apenas 9 multiplicações simples. Observe que nos passos B, C e E fazemos a multiplicação usando o método de Karatsuba para números de dois dígitos.

Método tradicional para multiplicar 2531×1467

$$\begin{array}{r} 2531 \\ \times 1467 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 2531 \\ \times 1467 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 2531 \\ \times 1467 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 2531 \\ \times 1467 \\ \hline \end{array} = 3712977$$

Método de Karatsuba para multiplicar 2531×1467

$$\begin{array}{r} \boxed{25} \boxed{31} \\ \boxed{14} \boxed{67} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 14 \\ \hline 350 \end{array} \quad \begin{array}{r} 31 \\ \times 67 \\ \hline 2077 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25+31=56 \\ 14+67=81 \end{array} \quad \begin{array}{r} 56 \\ \times 81 \\ \hline 4536 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4536 \\ - 2077 \\ - 350 \\ \hline 2109 \end{array} \quad \begin{array}{r} 350 \\ 2109 \\ + 2077 \\ \hline 3712977 \end{array}$$

c) Para multiplicar dois números de 8 dígitos, dividimos cada número em dois blocos de 4 dígitos, e aplicamos o método de Karatsuba utilizando os blocos no lugar dos algarismos. Dentro de cada bloco utilizamos o método de Karatsuba para multiplicações de números de 4 dígitos. Quantas multiplicações simples o método utiliza nessas multiplicações?

d) Mostre que a razão entre o número de multiplicações simples utilizadas pelo método de Karatsuba para multiplicar dois números de 32 dígitos e o número de multiplicações simples utilizadas pelo algoritmo tradicional é menor que $\frac{1}{4}$.

PROBLEMA 5

Dizemos que um inteiro positivo n é *perfeito* se, e somente se, a soma de seus divisores positivos, denotada $\sigma(n)$, é igual ao dobro do número. Ou seja, em símbolos, $\sigma(n) = 2n$. Por exemplo, 28 é um número perfeito, pois

$$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28.$$

Pode-se demonstrar que todo número perfeito par é da forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, em que $2^p - 1$ é um número primo. De fato, para $p = 3$, temos $2^{3-1}(2^3 - 1) = 28$, sendo $2^3 - 1 = 7$, um número primo, e 28 é um número perfeito, como vimos anteriormente.

a) A sequência dos números perfeitos pares escritos em ordem crescente se inicia por $6 = 2^1 \cdot 3$, $28 = 2^2 \cdot 7$ e $496 = 2^4 \cdot 31$. Qual é o quarto número dessa sequência?

Não se sabe até hoje se existe algum número perfeito ímpar. Se existir, ele tem mais do que 1500 dígitos em sua representação decimal e possui pelo menos 101 divisores ímpares (não necessariamente distintos). Para colaborar na busca dos números perfeitos ímpares, foi criado o conceito de *número perfeito deficiente*: um inteiro positivo n é perfeito deficiente se existe x inteiro positivo tal que

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{2x - 1}{x}.$$

Assim, 10 é um número perfeito deficiente, pois $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$ e

$$\frac{\sigma(10)}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5} = \frac{2 \cdot 5 - 1}{5}.$$

b) Sabe-se que 44 é um número perfeito deficiente. Determine x inteiro positivo tal que $\frac{\sigma(44)}{44} = \frac{2x-1}{x}$.

c) Pode-se demonstrar que $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$, se a e b são primos entre si, ou seja, $\text{mdc}(a, b) = 1$. Assim, $\sigma(600) = \sigma(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2) = \sigma(2^3) \cdot \sigma(3) \cdot \sigma(5^2) = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3)(1 + 5 + 5^2) = 1860$. Utilizando esse fato, verifique que $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$ é um número perfeito deficiente, isto é, descubra x inteiro positivo tal que a fração irredutível para $\frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2}$ é igual a $\frac{2x-1}{x}$.

Observação: Acabamos de obter um número perfeito deficiente ímpar. ☺

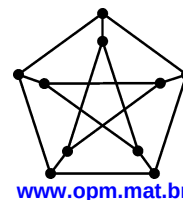
d) O grande matemático e filósofo Descartes observou que se 22021 fosse primo, então $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021$ seria um número perfeito ímpar. A partir do item c, justifique essa afirmação de Descartes.

Observação: Infelizmente, $22021 = 19^2 \cdot 61$. ☹

XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (10 de agosto de 2019)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Você sabe o que representa a figurinha no botão para salvar arquivo (Figura 1)? É a imagem de um disquete. Durante os anos 1990, antes de a internet se tornar muito popular e rápida e surgirem os *pen drives*, os disquetes eram a forma mais comum de transportar arquivos. O modelo de disquete mais popular era o de 3,5 polegadas com capacidade de 1,44 MB como o mostrado na Figura 2. A medida de 3,5 polegadas faz referência ao lado menor desse disquete. Nas perguntas desse problema considere esse modelo de disquete.



Figura 1

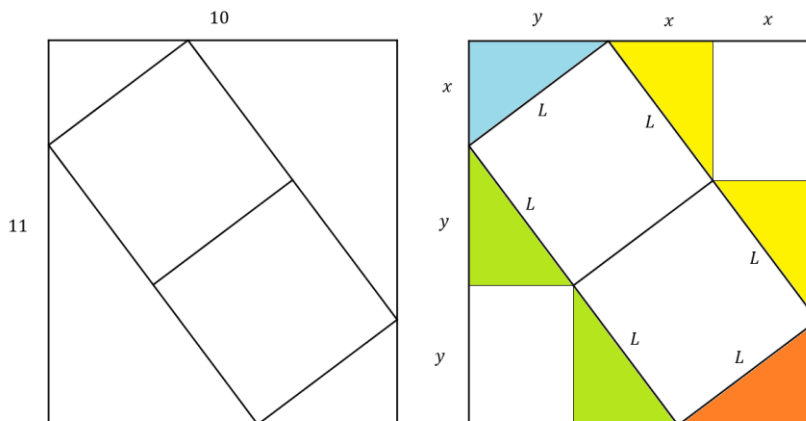


Figura 2

- a) Sabendo que 1 polegada = 2,54 cm, qual é a medida em cm do lado menor do disquete de 3,5 polegadas?
- b) O jogo FIFA 19 está disponível na internet num arquivo para download de 38,32 GB. Quantos disquetes seriam usados, no mínimo, para armazenar o arquivo do FIFA 19? Suponha que este arquivo possa ser dividido em partes, que todo o espaço de cada disquete é usado apenas para o arquivo e que 1 GB = 1000 MB.
- c) O lado maior do disquete tem comprimento 9,3 cm. Considere uma sala de aula de dimensões 5 m $\times$ 6 m e N a quantidade de disquetes necessária para armazenar o arquivo do FIFA 19. A área total desses N disquetes seria equivalente à área de quantas salas de aula? Lembre-se que 1 m² = 10000 cm².

PROBLEMA 2

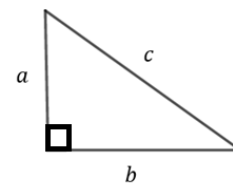
Os *poliminós* são pecinhas formadas por quadradinhos de mesmo lado usadas em jogos e quebra-cabeças. Os nomes dos poliminós são indicados pelo número de quadradinhos usados para montá-los. Por exemplo, os dominós são formados por dois quadradinhos e os pentaminós são formados por cinco quadradinhos. As figuras a seguir mostram um dominó formado por dois quadradinhos de lado L inscrito num retângulo de dimensões 10 $\times$ 11. Vamos mostrar como determinar a medida L .



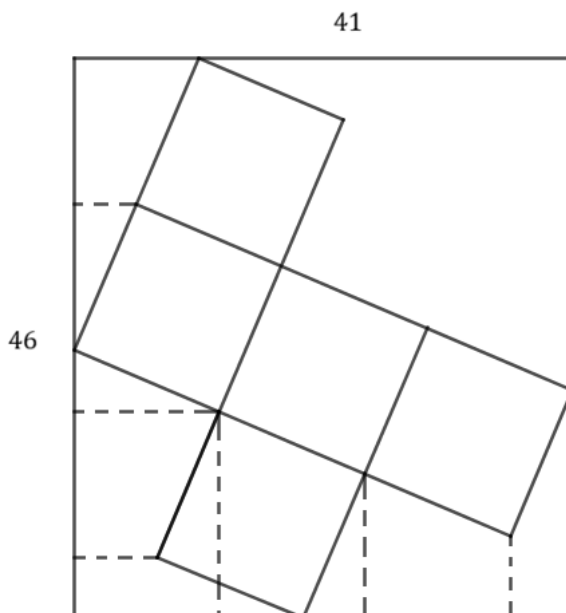
- a) Traçam-se linhas horizontais e verticais passando pelos vértices que formam o dominó. Assim, são formados 6 triângulos retângulos com lados x , y e L . A partir dos comprimentos dos segmentos horizontais, $y + 2x = 10$. Quanto vale $2y + x$?

b) Calcule x , y e L .

Você pode querer utilizar o Teorema de Pitágoras para calcular L . Ele afirma que num triângulo retângulo o lado oposto ao ângulo reto ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados. No exemplo ao lado, $a^2 + b^2 = c^2$.



c) Na figura a seguir, temos um pentaminó inscrito num retângulo 41×46 . Determine a medida dos lados dos quadradinhos que formam o pentaminó.



PROBLEMA 3

Dizemos que um inteiro positivo n é *perfeito* se, e somente se, a soma de seus divisores positivos, denotada $\sigma(n)$, é igual ao dobro do número. Ou seja, em símbolos, $\sigma(n) = 2n$. Por exemplo, 28 é um número perfeito, pois

$$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28.$$

Pode-se demonstrar que todo número perfeito par é da forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, em que $2^p - 1$ é um número primo. De fato, para $p = 3$, temos $2^{3-1}(2^3 - 1) = 28$, sendo $2^3 - 1 = 7$, um número primo, e 28 é um número perfeito, como vimos anteriormente.

a) A sequência dos números perfeitos pares escritos em ordem crescente se inicia por $6 = 2^1 \cdot 3$, $28 = 2^2 \cdot 7$ e $496 = 2^4 \cdot 31$. Qual é o quarto número dessa sequência?

Não se sabe até hoje se existe algum número perfeito ímpar. Se existir, ele tem mais do que 1500 dígitos em sua representação decimal e possui pelo menos 101 divisores ímpares (não necessariamente distintos). Para colaborar na busca dos números perfeitos ímpares, foi criado o conceito de *número perfeito deficiente*: um inteiro positivo n é perfeito deficiente se existe x inteiro positivo tal que

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{2x-1}{x}.$$

Assim, 10 é um número perfeito deficiente, pois $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$ e

$$\frac{\sigma(10)}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5} = \frac{2 \cdot 5 - 1}{5}.$$

b) Sabe-se que 44 é um número perfeito deficiente. Determine x inteiro positivo tal que $\frac{\sigma(44)}{44} = \frac{2x-1}{x}$.

c) Pode-se demonstrar que $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$, se a e b são primos entre si, ou seja, $\text{mdc}(a, b) = 1$. Assim, $\sigma(600) = \sigma(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2) = \sigma(2^3) \cdot \sigma(3) \cdot \sigma(5^2) = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3)(1 + 5 + 5^2) = 1860$. Utilizando esse fato, verifique que $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$ é um número perfeito deficiente, isto é, descubra x inteiro positivo tal que a fração irredutível para $\frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2}$ é igual a $\frac{2x-1}{x}$.

Observação: Acabamos de obter um número perfeito deficiente ímpar. ☺

d) O grande matemático e filósofo Descartes observou que se 22021 fosse primo, então $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021$ seria um número perfeito ímpar. A partir do item c, justifique essa afirmação de Descartes.

Observação: Infelizmente, $22021 = 19^2 \cdot 61$. ☹

PROBLEMA 4

Nesse problema contaremos o número de sequências que embaralham $1, 2, 3, \dots, n$ (tais sequências são chamadas *permutações*) tais que, para todo $k = 1, 2, 3, \dots, n$, os k primeiros números são consecutivos, talvez em outra ordem. Chamaremos essas permutações de *bacanas*. Por exemplo, para $n = 4$, uma permutação bacana é $(3, 2, 4, 1)$: (3) , $(3, 2)$, $(3, 2, 4)$ e $(3, 2, 4, 1)$ são números consecutivos, possivelmente misturados $(3; 2 \text{ e } 3; 2, 3 \text{ e } 4; 1 \text{ a } 4)$.

Para problemas desse tipo, é importante *estudar casos pequenos*.

- Para $n = 1$, temos só (1) .
- Para $n = 2$, temos $(1, 2)$ e $(2, 1)$, num total de 2 permutações bacanas.
- Para $n = 3$, temos $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$ e $(3, 2, 1)$, num total de 4 permutações bacanas.
- Para $n = 4$, temos $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 1, 3, 4)$, $(2, 3, 1, 4)$, $(3, 2, 1, 4)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 2, 4, 1)$, $(3, 4, 2, 1)$ e $(4, 3, 2, 1)$, num total de 8 permutações bacanas.

a) Liste todas as possibilidades para $n = 5$. São um total de 16 permutações bacanas.

Estudar casos pequenos não envolve só observar os valores e adivinhar o resultado no caso geral (até agora, obtemos 1, 2, 4, 8 e 16; você tem um chute para quantos são para $n = 200$, por exemplo?). Os casos pequenos também podem ajudar a encontrar padrões.

Por exemplo, observe os exemplos para $n = 4$: todos terminam em 4 ou 1. Se tirarmos o último número, obtemos:

- Caso o número for 4, $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$ e $(3, 2, 1)$;
- Caso o número for 1, $(2, 3, 4)$, $(3, 2, 4)$, $(3, 4, 2)$ e $(4, 3, 2)$ (o que acontece se subtrairmos 1 de cada número?).

Compare com os casos para $n = 3$. Coincidência? Acho que não!

b) Escolhemos $n - 1$ números consecutivos, todos entre 1 e n . Quais são as possibilidades para o número que sobrou? Não se esqueça de justificar sua resposta!

c) Mostre que a quantidade de permutações bacanas de tamanho n é o dobro da quantidade de permutações bacanas de tamanho $n - 1$, e obtenha a quantidade total de permutações bacanas de tamanho n .

PROBLEMA 5

a) Mostre que a equação $(x + r)^2 + (x + s)^2 = 0$, com $r \neq s$, não possui raiz real, sem calcular o seu discriminante (o delta, $\Delta = b^2 - 4ac$).

b) A partir do cálculo do discriminante (o delta, $\Delta = b^2 - 4ac$) da equação apresentada no item a, prove que, para quaisquer reais r, s , com $r \neq s$,

$$\frac{r^2 + s^2}{2} > rs$$

Para os itens c e d, considere a equação $(x + a_1)^2 + (x + a_2)^2 + \dots + (x + a_{10})^2 = 0$.

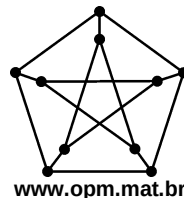
c) Escreva tal equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Quais são as expressões para a , b e c ?

d) A partir do cálculo do discriminante (o delta, $\Delta = b^2 - 4ac$) da equação obtida no item c, prove a desigualdade entre a média quadrática e a média aritmética:

Para quaisquer números reais $a_1, a_2, \dots, a_{10}$,

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{10}^2}{10}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}{10}$$

XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (10 de agosto de 2019)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)



Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Você sabe o que representa a figurinha no botão para salvar arquivo (Figura 1)? É a imagem de um disquete. Durante os anos 1990, antes de a internet se tornar muito popular e rápida e surgirem os *pen drives*, os disquetes eram a forma mais comum de transportar arquivos. O modelo de disquete mais popular era o de 3,5 polegadas com capacidade de 1,44 MB como o mostrado na Figura 2. A medida de 3,5 polegadas faz referência ao lado menor desse disquete. Nas perguntas desse problema considere esse modelo de disquete.



Figura 1

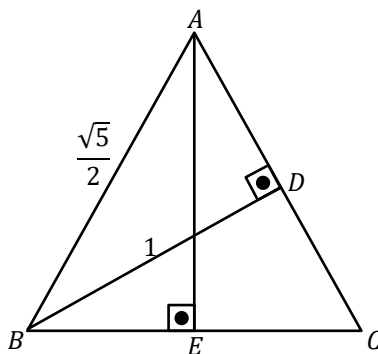


Figura 2

- a) Sabendo que 1 polegada = 2,54 cm, qual é a medida em cm do lado menor do disquete de 3,5 polegadas?
- b) O jogo FIFA 19 está disponível na internet num arquivo para download de 38,32 GB. Quantos disquetes seriam usados, no mínimo, para armazenar o arquivo do FIFA 19? Suponha que este arquivo possa ser dividido em partes, que todo o espaço de cada disquete é usado apenas para o arquivo e que 1 GB = 1000 MB.
- c) O lado maior do disquete tem comprimento 9,3 cm. Considere uma sala de aula de dimensões 5 m $\times$ 6 m e N a quantidade de disquetes necessária para armazenar o arquivo do FIFA 19. A área total desses N disquetes seria equivalente à área de quantas salas de aula? Lembre-se que 1 m² = 10000 cm².

PROBLEMA 2

Na figura a seguir, o triângulo ABC é isósceles com $AB = AC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e a altura BD relativa a AC é igual a 1.



- a) Calcule AD .
- b) Calcule as tangentes de $\widehat{ABD}$, $\widehat{CBD}$ e $\widehat{DCB}$.
- c) Quando sabemos a tangente x de um ângulo α , podemos descrevê-lo usando o *arco tangente*: se α é tal que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{tg} \alpha = x$, escrevemos $\alpha = \operatorname{arctg} x$. Sendo $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ a *razão áurea*, mostre que $\operatorname{arctg} \varphi - \operatorname{arctg} \frac{1}{\varphi} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.
- Você pode querer usar o fato de que $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

PROBLEMA 3

Dizemos que um inteiro positivo n é *perfeito* se, e somente se, a soma de seus divisores positivos, denotada $\sigma(n)$, é igual ao dobro do número. Ou seja, em símbolos, $\sigma(n) = 2n$. Por exemplo, 28 é um número perfeito, pois

$$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28.$$

Pode-se demonstrar que todo número perfeito par é da forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, em que $2^p - 1$ é um número primo. De fato, para $p = 3$, temos $2^{3-1}(2^3 - 1) = 28$, sendo $2^3 - 1 = 7$ um número primo, e 28 é um número perfeito como vimos anteriormente.

Não se sabe até hoje se existe algum número perfeito ímpar. Se existir, ele tem mais do que 1500 dígitos em sua representação decimal e possui pelo menos 101 divisores ímpares (não necessariamente distintos). Para colaborar na busca dos números perfeitos ímpares foi criado o conceito de *número perfeito deficiente*: um inteiro positivo n é perfeito deficiente se existe x inteiro positivo tal que

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{2x-1}{x}.$$

Assim, 10 é um número perfeito deficiente, pois $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$ e

$$\frac{\sigma(10)}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5} = \frac{2 \cdot 5 - 1}{5}.$$

a) Prove que toda potência de 2 é um número perfeito deficiente.

b) Pode-se demonstrar que $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$, se a e b são primos entre si, ou seja, $\text{mdc}(a, b) = 1$. Assim, $\sigma(600) = \sigma(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2) = \sigma(2^3) \cdot \sigma(3) \cdot \sigma(5^2) = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3)(1 + 5 + 5^2) = 1860$. Utilizando esse fato, verifique que $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$ é um número perfeito deficiente, isto é, descubra x inteiro positivo tal que a fração irredutível para $\frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2}$ é igual a $\frac{2x-1}{x}$.

Observação: Acabamos de obter um número perfeito deficiente ímpar. ☺

c) O grande matemático e filósofo Descartes observou que se 22021 fosse primo, então $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021$ seria um número perfeito ímpar. A partir do item c, justifique essa afirmação de Descartes.

Observação: Infelizmente, $22021 = 19^2 \cdot 61$. ☹

d) Prove que se $\sigma(n)$ é ímpar, então o número de divisores de n é ímpar. Conclua que todo número perfeito deficiente ímpar é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 4

Nesse problema iremos aprender a calcular o número de funções sobrejetoras do conjunto $X = \{1, 2, \dots, n\}$ em $Y = \{1, 2, \dots, k\}$, ou seja, funções cujas imagens contêm todos os números de 1 a k , com $n \geq k$, e obter uma identidade bastante interessante no caso em que $n = k$.

Para isso, iremos utilizar uma generalização de $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, em que $n(S)$ representa o número de elementos do conjunto finito S . Essa identidade é chamada **Princípio da Inclusão-Exclusão**:

Para quaisquer conjuntos finitos $A_1, A_2, \dots, A_k$,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{1 \leq i \leq k} n(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \dots + (-1)^{k+1} \cdot n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k).$$

Por exemplo:

- $k = 2: n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$;
- $k = 3: n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - [n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_3)] + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$;
- $k = 4: n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) - [n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_4) + n(A_3 \cap A_4)] + [n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4)] - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$.

a) Seja A_i o conjunto das funções f de $X = \{1, 2, \dots, n\}$ em $Y = \{1, 2, \dots, k\}$ tais que o número i não aparece na imagem de f . Exemplificando, para $n = 3$ e $k = 3$, A_1 é o conjunto formado pelas seguintes oito funções nas quais o número 1 não está contido nas suas imagens:

$$\begin{aligned} f_1(1) &= 2, f_1(2) = 2, f_1(3) = 2; \\ f_2(1) &= 2, f_2(2) = 2, f_2(3) = 3; \\ f_3(1) &= 2, f_3(2) = 3, f_3(3) = 2; \\ f_4(1) &= 3, f_4(2) = 2, f_4(3) = 2; \\ f_5(1) &= 2, f_5(2) = 3, f_5(3) = 3; \\ f_6(1) &= 3, f_6(2) = 2, f_6(3) = 3; \\ f_7(1) &= 3, f_7(2) = 3, f_7(3) = 2; \\ f_8(1) &= 3, f_8(2) = 3, f_8(3) = 3. \end{aligned}$$

Mostre que o número de funções no conjunto $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}$, $\ell \leq k$, é $(k - \ell)^n$.

b) Prove que o número de funções sobrejetoras de $X = \{1, 2, \dots, n\}$ em $Y = \{1, 2, \dots, k\}$, com $n \geq k$, é $k^n - n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)$.

c) Calcule o número de funções sobrejetoras de $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ em $Y = \{1, 2, 3\}$.

Dica: Aqui você pode desejar utilizar o Princípio da Inclusão-Exclusão.

d) Prove que

$$n! = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n.$$

PROBLEMA 5

Nesse problema, estimaremos $L(n)$, o mínimo múltiplo comum dos números de 1 a n , ou seja,

$$L(n) = \text{mmc}(1, 2, 3, \dots, n).$$

a) Seja p um primo menor do que n . Prove que o expoente $\alpha = v_p(L(n))$ de p na fatoração de $L(n)$, ou seja, o número de fatores primos p em $L(n)$ é $\alpha = \lfloor \log_p n \rfloor$. Aqui, $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x .

b) Mostre que

$$\ln L(n) = \sum_{p \leq n} \ln p \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor.$$

A soma é sobre os primos p que são menores ou iguais a n . Por exemplo, para $n = 6$, a soma é

$$\ln 2 \left\lfloor \frac{\ln 6}{\ln 2} \right\rfloor + \ln 3 \left\lfloor \frac{\ln 6}{\ln 3} \right\rfloor + \ln 5 \left\lfloor \frac{\ln 6}{\ln 5} \right\rfloor.$$

Aqui, $\ln x = \log_e x$ é o *logaritmo natural* de x . Você também pode querer usar o fato de que $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

c) Sendo x um número real, seja $\pi(x)$ a quantidade de primos menores ou iguais a x . Por exemplo, $\pi(10) = 4$, $\pi(2) = 1$ e $\pi(e) = 1$. Mostre que

$$\ln L(n) \leq \pi(n) \cdot \ln n.$$

d) Seja $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$ a *primeira função de Chebyshev*. Para todo y real com $1 \leq y < n$, mostre que

$$\pi(n) \leq y + \frac{\theta(n)}{\ln y}.$$

e) Tomando $y = \frac{n}{(\ln n)^2}$, conclua que

$$\theta(n) \leq \ln L(n) \leq \pi(n) \ln n \leq \frac{n}{\ln n} + \frac{\theta(n)}{1 - \frac{2 \ln \ln n}{\ln n}}.$$

Observação: dividindo tudo por n , isso mostra que, para n grande, temos $\frac{\ln L(n)}{n} \cong \frac{\pi(n) \ln n}{n}$. O Teorema do Número Primo diz que $\pi(n) \cong \frac{n}{\ln n}$, logo isso prova que

$$\sqrt[n]{L(n)} \cong e.$$

Você não precisa fazer essa parte.