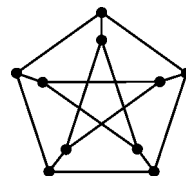


XLVIII OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (agosto de 2024)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.
- Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser justificadas.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
 - (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
 - (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

País	Número de medalhas			Premiação por medalha (em milhares de dólares)			Posição no Quadro de Medalhas	Premiação total (em milhares de dólares)
	Ouro	Prata	Bronze	Ouro	Prata	Bronze		
Itália	12	13	15	196	98	65	9	10700
França	16	26	22	87	43	22	5	9400
Estados Unidos	40	44	42	37,5	22,5	15	1	8300
Hungria	6	7	6	165	118	94	14	3800
Hong Kong	2	0	2	768	394	192	37	1900
Ucrânia	3	5	4	125	80	55	22	1500
Israel	1	5	1	268	188	134	41	1500
Países Baixos	15	7	12	33	16	8	6	1300
Nova Zelândia	10	7	3	40	30	30	11	1000
Brasil	3	7	10	65	39	26	20	1000
Polônia	1	4	5	84	65	50	42	1000

Acima temos uma tabela com alguns países que pagaram mais de 1 milhão de dólares (valores aproximados) no total para seus atletas medalhistas em Paris 2024. O valor pago por medalha corresponde às modalidades individuais. Alguns países pagam valores maiores para os esportes que envolvem dois ou mais atletas.

a) Os Estados Unidos ganharam as medalhas de ouro no basquete masculino e no feminino. Essas equipes de basquete nas olimpíadas eram formadas por 12 atletas. Cada atleta recebeu o valor pago para um medalhista de ouro de modalidade individual. O total pago por Hong Kong por todos os seus medalhistas de ouro (considere todos individuais) é quantos por cento maior do que o valor total pago pelos EUA para seus medalhistas do basquete masculino e do feminino?

b) Dentre os países da tabela, faz sentido medir o sucesso de um país na competição pelo produto de sua posição no quadro de medalhas pela premiação total paga. Um valor menor indica um país que conseguiu uma boa classificação sem gastar tanto. Na tabela, qual seria o país de melhor desempenho considerando tal medida? Qual seria o pior?

c) Os nadadores dos EUA ficaram com 23% do total pago pelo país. Sabendo que os Estados Unidos ganharam 28 medalhas na natação e com os dados da tabela, podemos deduzir que eles tiveram medalha em alguma modalidade de revezamento?

Obs.: Não adianta citar aqui que você sabe que eles venceram o revezamento 4 X 100m Feminino. É olimpíada de Matemática, né!

O Brasil decidiu pagar valores maiores por medalha para esportes coletivos. Para esportes com 2 a 6 atletas pagou o dobro da premiação. E, para esportes com 7 ou mais atletas, pagou ainda mais. Os valores pagos por cada tipo de medalha foram diretamente proporcionais aos pagos para os esportes individuais. Por exemplo, sendo a , b e c os valores pagos respectivamente pelas medalhas de ouro, prata e bronze em um esporte envolvendo 7 ou mais atletas, então $\frac{a}{65} = \frac{b}{39} = \frac{c}{23}$. Esses valores totais maiores, é claro, são divididos igualmente entre os medalhistas em cada modalidade.

d) Sabe-se que o Brasil obteve:

- Ouro no Voleibol de Praia Feminino – 2 atletas;
- Prata no Futebol Feminino – 22 atletas;
- Bronze na Ginástica por Equipes Feminina – 5 atletas;
- Bronze no Judô por Equipes – 10 atletas;
- Bronze no Voleibol Feminino – 13 atletas.

As outras medalhas do Brasil foram em esportes individuais. Determine as quantidades de medalhas de ouro, prata e bronze que o Brasil obteve em esportes individuais.

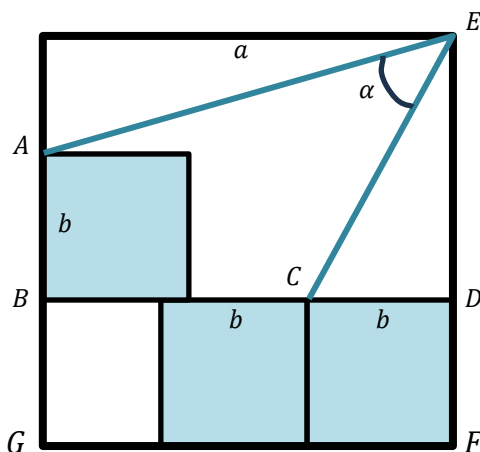
e) Quanto o Brasil pagou no total pelas medalhas individuais?

f) Determine quanto aproximadamente cada jogadora da equipe de Voleibol recebeu de premiação, em dólares.

PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

A professora Catriona Agg divulga, em suas redes sociais, diversos quebra-cabeças matemáticos, a maioria deles em geometria. Um muito bacana é o que se segue:

Os três quadrados menores têm o mesmo tamanho e estão no interior de um quadrado maior, como representado na figura a seguir. Qual é a medida do ângulo α ?



Vamos dar nomes a alguns pontos, A , B , C e D são alguns vértices de quadrados menores e E , F e G são vértices do quadrado maior, como mostrado na figura. Note que $\angle CEA = \alpha$ é o ângulo que queremos determinar.

a) Sendo a a medida do lado do quadrado maior e b a medida do lado de cada um dos três quadrados menores, Calcule, em termos de a e b , as medidas dos segmentos BC e DE .

b) Dois triângulos são congruentes quando possuem cada um dos lados correspondentes com mesmas medidas e cada um dos ângulos correspondentes com mesmas medidas. Explique por que os triângulos ABC e CDE possuem dois lados correspondentes com mesmas medidas e os ângulos entre esses lados com mesma medida.

Isso é suficiente para concluir que os triângulos ABC e CDE são congruentes.

c) Calcule a medida do ângulo $\angle ACE$.

d) Calcule α .

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Dizemos que um número inteiro positivo $n > 1$ é *prático* se todos os números inteiros positivos menores ou iguais a n podem ser expressos como soma de um ou mais de seus divisores positivos. É importante observar que consideramos válidas adições envolvendo um único número.

Por exemplo, 12 é prático, pois seus divisores positivos são 1, 2, 3, 4, 6 e 12 e, além disso:

$$5 = 2 + 3, \quad 7 = 1 + 2 + 4, \quad 8 = 2 + 6, \quad 9 = 3 + 6, \quad 10 = 4 + 6 \text{ e } 11 = 2 + 3 + 6.$$

Ou seja, todos os inteiros de 1 a 12 são somas de um ou mais divisores de 12.

a) Existe um número ímpar maior ou igual a 3 que é prático? Justifique.

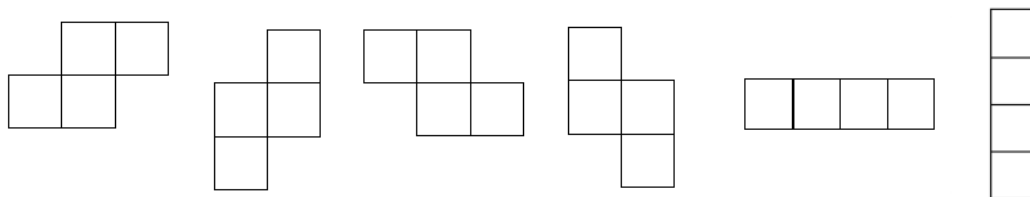
b) Mostre que os números de 1 a 30 são somas (possivelmente de um único número) de divisores positivos de 30. Observe que isso nos permite concluir que 30 é prático.

c) O número 102 é prático? Não se esqueça de que você deve justificar sua resposta.

Observando os três itens anteriores, podemos perceber que pode ser trabalhoso determinar utilizando apenas a definição se um número é prático ou não. Apresentaremos agora uma caracterização desses números, ou seja, condições que são equivalentes à definição e que permitem determinar de modo mais rápido se um número é prático ou não. Para tal, vamos usar a soma dos divisores positivos do inteiro n que é denotada por $\sigma(n)$. Por exemplo, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$, $\sigma(26) = 1 + 2 + 13 + 26 = 42$ e $\sigma(30) = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30 = 72$. Assim, podemos apresentar a caracterização a seguir:

a) Qual seria o total de tetraminós necessários para cobrir o diamante asteca de tamanho 5?

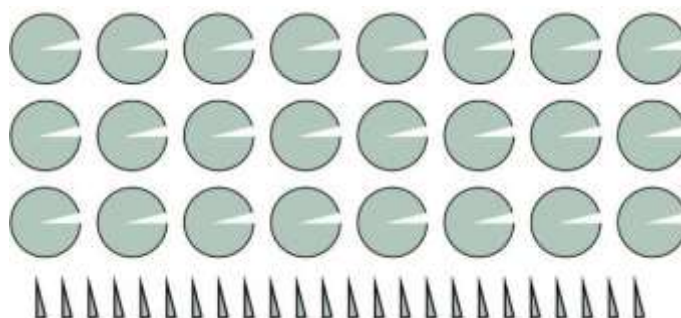
Suponha que temos uma quantidade infinita de peças disponíveis dos dois tipos, Z-tetraminó e tetraminó reto. Considere que as peças podem ser giradas ou viradas. Isso significa que elas podem ser posicionadas das seguintes formas.



- b) Explique por que a soma dos números nos quadrados no diamante asteca de tamanho 5 mostrado anteriormente que podem ser cobertos por uma peça (Z-tetraminó ou tetraminó reto) sempre deixa resto 2 na divisão por 4. Em outras palavras, é um número da forma $4x + 2$ para algum x inteiro.
- c) Prove que a soma de todos os números no diamante asteca de tamanho 5 mostrado é um múltiplo de 4.
- d) Considerando os resultados dos itens b e c, explique por que a quantidade de tetraminós para cobrir o diamante todo deveria ser par.
- e) Comparando os resultados do item a e do item d, conclua o problema, ou seja, explique por que não é possível cobrir um diamante asteca de tamanho 5 com peças tetraminó reto e Z-tetraminó.

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

Imagine que você tem 24 bolinhos iguais para dividir entre 25 pessoas. Uma maneira de fazer a divisão é cortar $\frac{1}{25}$ de cada bolinho. Nesse caso, 24 pessoas recebem $\frac{24}{25}$ de um bolinho e a outra pessoa recebe 24 pedaços de $\frac{1}{25}$ de bolinho. Só que isso é ruim para essa pessoa, pois ninguém gosta de receber pedaços pequenos de bolinhos, mesmo que sejam muitos pedaços:



Queremos que o menor pedaço seja o maior possível. Isso nos leva ao seguinte problema de matemática:

Queremos dividir igualmente uma quantidade de bolinhos entre uma outra quantidade de pessoas. Para isso, cortamos alguns bolinhos (talvez todos!) em algumas quantidades de pedaços (podem ser mais de dois pedaços). Qual é a maior fração possível de bolinho do menor pedaço cortado?

Por exemplo, podemos dividir 7 bolinhos entre 4 pessoas, com pedaços de tamanho pelo menos $\frac{5}{12}$ de um bolinho:

								Total
	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$					$\frac{21}{12}$
	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$				$\frac{6}{12}$	$\frac{21}{12}$
				$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$		$\frac{21}{12}$
				$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{21}{12}$
Total	1	1	1	1	1	1	1	

Note que cada pessoa recebe $\frac{21}{12}$ que é igual a $\frac{7}{4}$ e representa a quantidade de bolinho quando 7 bolinhos são divididos para 4 pessoas. Pode-se provar (isso é bem difícil!) que o maior menor pedaço possível, considerando todas as possibilidades de fazer as divisões, é $\frac{5}{12}$.

- a) Mostre uma maneira de fazer a divisão de 4 bolinhos entre 7 pessoas de modo que cada pedaço tenha pelo menos $\frac{5}{21}$ de bolinho. Use a tabela na folha de respostas para exibir sua divisão. *Sugestão: aproveite o exemplo para 7 bolinhos e 4 pessoas!*

b) Dado que o maior menor pedaço possível para a divisão de 7 bolinhos entre 4 pessoas é $\frac{5}{12}$, prove que o maior menor pedaço possível para divisão de 4 bolinhos para 7 pessoas é $\frac{5}{21}$ de bolinho.

Nos próximos itens, de c até f, vamos estudar o caso em que temos de dividir 4 bolinhos entre 3 pessoas. Primeiro, é fácil obter pedaços todos com pelo menos $\frac{1}{3}$ de bolinho: basta dividir um bolinho em três pedaços iguais e dar $\frac{1}{3}$ para cada pessoa, além de um bolinho a mais. Cada pessoa recebe $1 + \frac{1}{3}$ de bolinho.

c) Mostre que se algum bolinho é cortado em uma quantidade maior do que dois pedaços então algum desses pedaços é máximo $\frac{1}{3}$ de um bolinho.

d) O item anterior mostra que os únicos casos relevantes são os casos em que cada bolinho é cortado em dois pedaços ou não é cortado. Suponha que algum bolinho não é cortado, mostre que algum pedaço teria que ser no máximo $\frac{1}{3}$ de bolinho.

e) Suponha que cada bolinho é cortado em exatamente dois pedaços, mostre que uma pessoa deve receber exatamente dois pedaços e as outras duas devem receber exatamente três pedaços, ou poderíamos concluir que algum pedaço de bolinho é no máximo $\frac{1}{3}$ de bolinho.

f) Mostre que, mesmo no caso em que uma pessoa recebe exatamente dois pedaços e as outras duas recebem exatamente três pedaços, algum dos pedaços tem no máximo $\frac{1}{3}$ de bolinho.

Figura para copiar na folha de respostas:

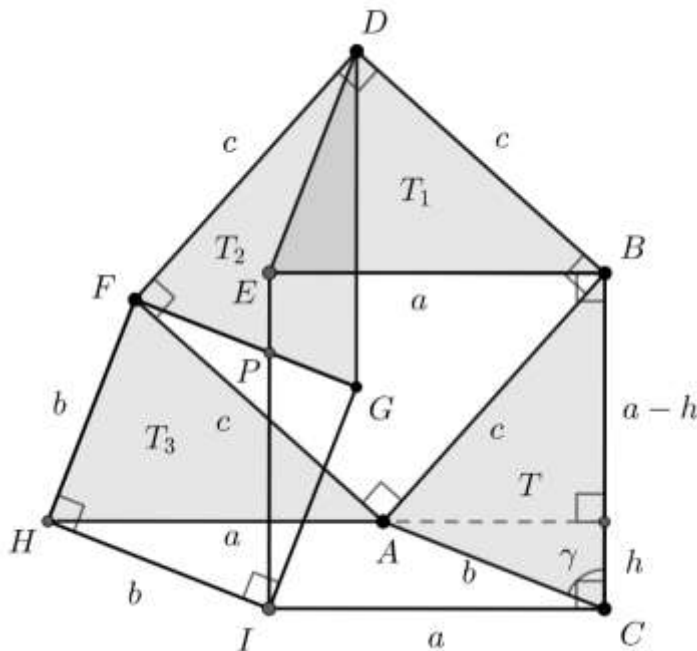
					Total
					$\frac{12}{21}$
					$\frac{12}{21}$
					$\frac{12}{21}$
					$\frac{12}{21}$
					$\frac{12}{21}$
					$\frac{12}{21}$
					$\frac{12}{21}$
Total	1	1	1	1	

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Thābit ibn Qurra foi um matemático e astrônomo que fez descobertas importantes em geometria, álgebra e astronomia. Uma dessas descobertas foi uma extensão do Teorema de Pitágoras para triângulos que não são retângulos. Vamos estudar essa extensão que é equivalente a um teorema muito importante chamado Lei dos Cossenos.

O Teorema de Pitágoras diz que num triângulo retângulo em que os lados a e b formam o ângulo de 90° e o lado c é oposto ao ângulo reto tem-se $a^2 + b^2 = c^2$. É o famoso “a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”.

Seja T um triângulo com lados a , b e c de modo que os lados a e b formam um ângulo γ , com $\gamma < 90^\circ$. Considere os triângulos $T_1 = DBE$, $T_2 = FDG$ e $T_3 = FAH$ congruentes a $T = ABC$ obtidos através de rotações e translações de T de modo que $ABDF$ seja um quadrado de lado c . Usaremos $Q(a) = a^2$, $Q(b) = b^2$ e $Q(c) = c^2$ para as áreas dos quadrados de lados a , b e c , respectivamente. Na figura, $ABDF$, $CBEI$ e $IGFH$ são quadrados de lados c , a e b , respectivamente. Podemos observar que, pela construção de T_3 , o lado AH é perpendicular ao lado BC . A reta AH divide o lado BC em segmentos de comprimentos h e $a - h$ como mostrado na figura.



Usaremos a representação de polígonos entre colchetes para representar a área desse polígono. Por exemplo, $[ABDF] = Q(c) = c^2$.

- Prove que os quadriláteros $CAHI$ e $IGDE$ são congruentes, ou seja, que os dois quadriláteros possuem lados e ângulos correspondentes com as mesmas medidas.
- Explique por que vale $Q(c) = [BEPFA] + [T_1] + [T_2] - [DEPG]$.
- Explique por que $[GPI] = [CAHI] - [DEPG]$.
- Usando a figura, escreva uma expressão para $Q(a) + Q(b)$ usando $[BEPFA]$, $[T]$, $[T_3]$, $[CAHI]$ e $[DEPG]$.
- Usando os itens anteriores, prove que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ah$.

Dica: você pode querer utilizar que $[CAHI] = ah$.

PROBLEMA 7 – Valor: 6 pontos

Os autômatos e as expressões regulares são estruturas importantes em ciência da computação. Elas ajudam no estudo das tarefas que são realizáveis por um computador e das tarefas que não são. Nesse problema vamos aprender um pouco sobre essas estruturas. Como temos muita coisa para apresentar, será uma questão bem longa, mas vale a pena e vale 6 pontos (recorde da OPM em ano de olimpíadas)!

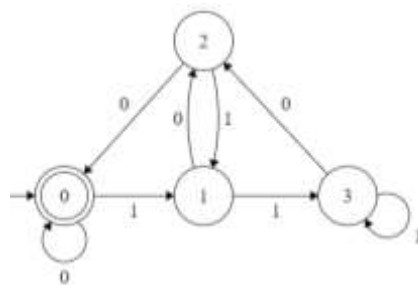
Um *autômato finito* (AF) é formado por cinco ingredientes:

- um conjunto Q de *estados*;
- um conjunto Σ de *símbolos* que o autômato pode ler;
- uma *função de transição* δ que indica para qual estado o autômato vai de acordo com o estado atual e o símbolo lido;
- um *estado inicial* q_0 do conjunto Q que representa onde o autômato começa;
- um subconjunto F do conjunto Q com os *estados de aceitação*.

De certo modo, você imaginar o autômato “caminhando” de um estado para outro. Ele começa de q_0 , lê uma sequência w (denominada *cadeia*) de símbolos, e caminha de um estado para o próximo de acordo com as regras ditadas pela função de transição. Se, ao terminar a sequência, o autômato estiver em um estado pertencente a F , dizemos que o autômato *aceita* a cadeia w . O conjunto de todas as cadeias aceitas por um autômato AF é chamado de *linguagem* do AF.

Uma forma de representar um autômato é usar um *grafo*, como o exibido na figura a seguir. Cada bolinha representa um estado de Q . A função de transição é representada por setinhas com símbolos indicando o símbolo lido e a mudança de estados. Vale lembrar que a transição pode ir de um estado para ele mesmo. O estado q_0 é representado por uma setinha vindo do “exterior” apontando para ele. E os estados finais são representados por bolinhas duplas.

Veja um exemplo com $Q = \{0,1,2,3\}$, $\Sigma = \{0,1\}$ e $F = \{0\}$. Note que o estado inicial é 0, pois tem uma setinha $\rightarrow$ apontando para ele.

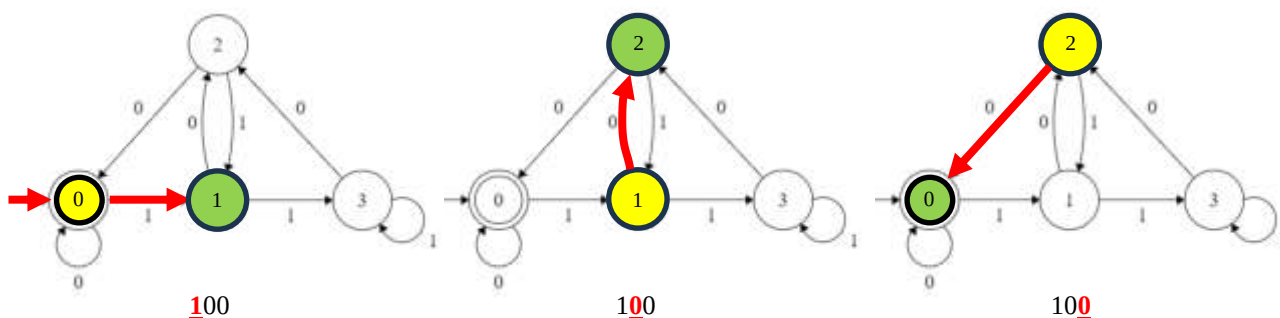


Autômato AF1

Veja que $w = 100$ pertence à linguagem do AF1, pois começando no estado inicial 0:

- AF1 lê 1 (100) vai do estado 0 para o estado 1.
- AF1 lê 0 (100) vai do estado 1 para o estado 2.
- AF1 lê 0 (100) vai do estado 2 para o estado 0.

Como 0 é um estado de aceitação (bolinha dupla!), a cadeia 100 é aceita.



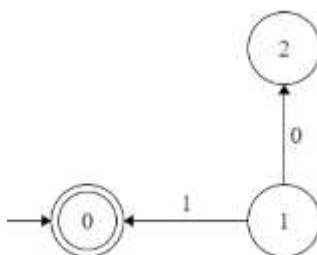
Por outro lado, a cadeia 1111 não é aceita, pois começando no estado inicial 0 no primeiro 1 o AF1 vai para o estado 1, no segundo 1 vai para o estado 3, no terceiro 1 fica no estado 3 e no quarto 1 fica no estado 3. O estado 3 não é um estado de aceitação.

a) Quais das cadeias 1100, 1001, 10100, 10110 e 10000 são aceitas pelo autômato AF1?

Nesse problema usaremos as representações binárias dos números inteiros positivos. Na representação binária cada algarismo é 0 ou 1 e cada posição representa uma potência de 2. Por exemplo, o número 12 na base decimal representa $1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$, mas na base binária temos $12 = (1100)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. É conhecido que cada inteiro positivo possui representação única na base binária.

b) Represente na base decimal os números $(1001)_2$, $(10100)_2$, $(10110)_2$ e $(10000)_2$.

O autômato AF1 aceita as cadeias que representam os múltiplos de um certo número na base binária (observe suas respostas no item b para saber qual!). De fato, podemos construir autômatos que aceitam cadeias formadas pelas representações na base binária dos números múltiplos de qualquer número. Por exemplo, o autômato AF2 (incompleto na figura) a seguir aceita as cadeias com as representações na base binária dos múltiplos de 3. Cada estado representa um resto na divisão por 3. O estado inicial é 0 e cada transição representa a mudança no resto ao ler mais um algarismo. Quando a leitura vai para o próximo algarismo, dobramos o peso de cada algarismo anterior e somamos o algarismo lido, refletindo o fato de que se um número N na base binária é seguido pelo algarismo x então obtemos o novo número $2N + x$; ou seja, multiplicamos por 2 e somamos o próximo algarismo. Por exemplo, se AF2 está no estado 1 (número lido até agora é da forma $3k + 1$) e lê 0, então o próximo estado é 2, pois $2(3k + 1) + 0 = 6k + 2$ deixa resto 2 na divisão por 3. Se AF2 está no estado 1 e lê 1, então o próximo estado é 0, pois $2(3k + 1) + 1 = 6k + 3$ deixa resto 0 na divisão por 3.



Autômato AF2 incompleto

c) Desenhe o autômato AF2 na sua folha de respostas e complete-o. De cada estado deve sair duas setinhas, 0 ou 1, que vão para o próximo estado de acordo com o resto na divisão por 3.

d) Agora é sua vez! Desenhe um autômato AF3 que aceita as cadeias formadas pelas representações na base binária dos números que são múltiplos de 5. Seu autômato deve ter 5 estados e deve apresentar todas as transições quando recebe algarismos 0 ou 1.

Autômatos são interessantes, mas podemos fazer mais. Dadas duas linguagens (conjuntos de cadeias) A e B , definimos as seguintes *operações regulares*:

- **União:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ são as cadeias em A ou em B .
- **Concatenação:** $A \circ B = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$ são as cadeias formadas por uma cadeia de A seguida por uma cadeia de B .
- **Estrela:** $A^* = \{x_1x_2 \dots x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$ formada pela concatenação de 0 ou mais cadeias de A .

Na aritmética, podemos usar operações $+$ e $\times$ para montar expressões tais como $(5 + 3) \times 4$.

Similarmente, podemos usar operações regulares para montar expressões descrevendo linguagens. Essas expressões são chamadas de *expressões regulares*. Por exemplo, $(0 \cup 1)^*$ é uma expressão regular.

O resultado do exemplo de expressão aritmética é $(5 + 3) \times 4 = 32$. Já o resultado de uma expressão regular é uma linguagem. No exemplo, $(0 \cup 1)^*$ é a linguagem formada por cadeias com um 0 ou um 1 seguido de uma quantidade qualquer de símbolos 0 (inclusive nenhum). Ou seja, as cadeias

0; 1; 00; 10; 000; 100; 0000; 1000; ...

Usaremos esse jeito prático e menos formal de escrever a expressão regular. Mais formalmente seria $(\{0\} \cup \{1\}) \circ \{0\}^*$.

A partir de uma linguagem podemos encontrar uma expressão regular que resulta nela. Por exemplo, se $L = \{w \mid w \text{ contém um único } 1\}$, então podemos usar a expressão regular $R = 0^*10^*$ formada por uma quantidade qualquer de zeros (inclusive nenhum) concatenada com um 1 concatenada com uma quantidade qualquer de zeros. Outro exemplo é a expressão regular $R = (\varepsilon \cup 1)(01 \cup 0)^*$, que representa a linguagem $\{w \mid w \text{ não possui dois } 1\text{s consecutivos}\}$. De fato, começamos com 1 ou com nada (representado pela *cadeia vazia* ε), e depois concatenamos 01 (garantindo sempre pelo menos um zero entre dois uns) ou zeros.

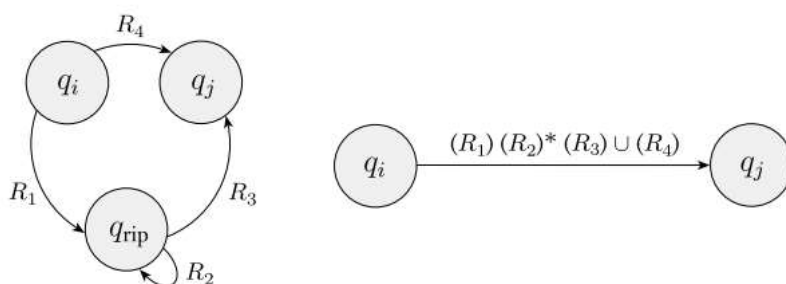
e) Dada a linguagem $L = \{w \mid \text{os blocos de } 0\text{s consecutivos de } w \text{ possuem comprimento par}\}$, encontre uma expressão regular R que a descreve. Sua resposta não pode ter três pontinhos, ou seja, a sua expressão regular deve ser finita.

Um resultado surpreendente é que toda linguagem aceita por um AF pode ser representada por uma expressão regular. Para construir uma expressão regular que satisfaz essa propriedade nós trocamos o autômato finito AF pelo *autômato finito generalizado* AG em que:

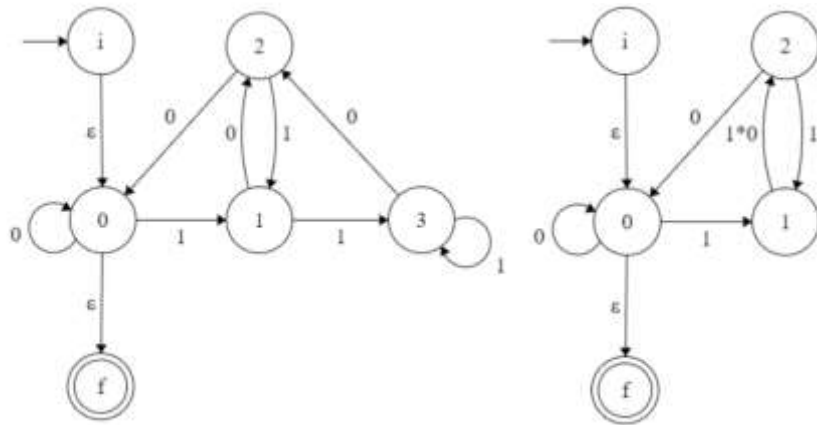
- temos um novo estado inicial i e um novo estado final f . De i há uma transição para o estado inicial de AF usando ε (cadeia vazia) e do(s) estado(s) final(is) do AF há transições usando ε para f .
- cada transição possui uma expressão regular que pode ser um símbolo como no AF, a cadeia vazia ε ou uma expressão regular mais geral como 0^*10^* .

Após definir o AG nós vamos eliminando os estados um por um até ficar apenas com uma expressão regular que vai do estado i para o estado f . Essa expressão representa exatamente a linguagem aceita pelo AF.

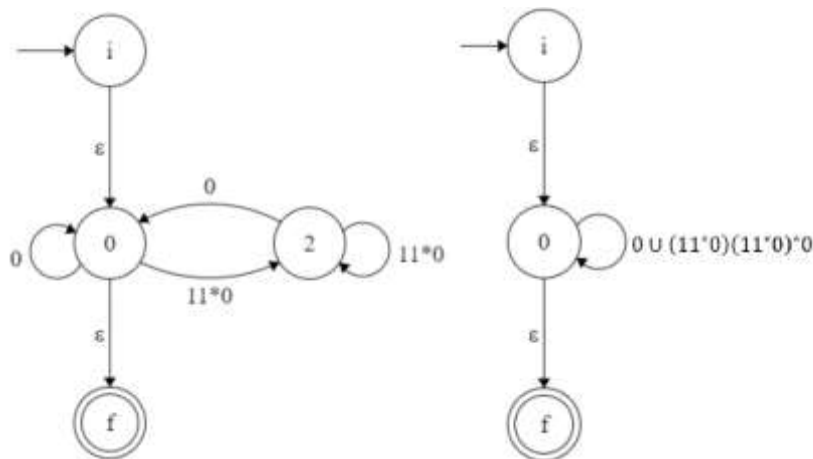
O passo chave das eliminações é representado pela figura a seguir. Para cada transição de um q_i chegando no q_{rip} e cada transição saindo do q_{rip} para um q_j temos uma transição nova do q_i para o q_j usando a expressão R_1 do q_i para o q_{rip} concatenada com as expressões $(R_2)^*$ de q_{rip} para q_{rip} concatenada com a expressão R_3 de q_{rip} para q_j . A expressão regular dessa nova transição é $R_1(R_2)^*R_3$. Se já havia uma transição com R_4 de q_i para q_j , então fazemos a união da nova transição com a antiga: $(R_1(R_2)^*R_3) \cup R_4$. Podemos ter também $q_i = q_j$; nesse caso, o resultado final é um loop, como fizemos $0 \xrightarrow{0} 0$ em AF1.



Vejamos o que acontece ao fazer isso com o AF1. Primeiro introduzimos os estados i e f . Em seguida, eliminamos o estado 3 e modificamos a transição de 1 para 2 para $0 \cup 11^*0$. Podemos notar que $0 \cup 11^*0 = 1^*0$.



Agora eliminamos o estado 1 e adicionamos as transições de 2 para 2 usando 11^*0 (usamos $q_i = q_j = 2$) e de 0 para 2 usando 11^*0 . O próximo estado eliminado é o 2. Precisamos adicionar a transição de 0 para 0 usando $(11^*0)(11^*0)^*0$. Como já tinha a transição usando o 0 passa a ser $0 \cup (11^*0)(11^*0)^*0$.



Lembrando que ε é apenas a cadeia vazia, podemos concluir que a linguagem aceita pelo AF1 é obtida pela expressão regular $R = (0 \cup (11^*0)(11^*0)^*0)^*$.

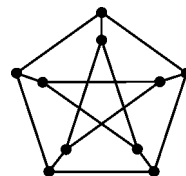
f) Considere o AF2 que você completou no item d. Desenhe o AG correspondente adicionando os estados i e f . Em seguida, desenhe o AG resultante de eliminar o estado 2. Lembre-se de desenhar as transições necessárias usando expressões regulares.

g) Escreva uma expressão regular que descreve as linguagens aceitas por AF2.

XLVIII OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (agosto de 2024)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.
- Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
 - (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
 - (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

País	Número de medalhas			Premiação por medalha (em milhares de dólares)			Posição no Quadro de Medalhas	Premiação total (em milhares de dólares)
	Ouro	Prata	Bronze	Ouro	Prata	Bronze		
Itália	12	13	15	196	98	65	9	10700
França	16	26	22	87	43	22	5	9400
Estados Unidos	40	44	42	37,5	22,5	15	1	8300
Hungria	6	7	6	165	118	94	14	3800
Hong Kong	2	0	2	768	394	192	37	1900
Ucrânia	3	5	4	125	80	55	22	1500
Israel	1	5	1	268	188	134	41	1500
Países Baixos	15	7	12	33	16	8	6	1300
Nova Zelândia	10	7	3	40	30	30	11	1000
Brasil	3	7	10	65	39	26	20	1000
Polônia	1	4	5	84	65	50	42	1000

Acima temos uma tabela com alguns países que pagaram mais de 1 milhão de dólares (valores aproximados) no total para seus atletas medalhistas em Paris 2024. O valor pago por medalha corresponde às modalidades individuais. Alguns países pagam valores maiores para os esportes que envolvem dois ou mais atletas.

a) Os Estados Unidos ganharam as medalhas de ouro no basquete masculino e no feminino. Essas equipes de basquete nas olimpíadas eram formadas por 12 atletas. Cada atleta recebeu o valor pago para um medalhista de ouro de modalidade individual. O total pago por Hong Kong por todos os seus medalhistas de ouro (considere todos individuais) é quantos por cento maior do que o valor total pago pelos EUA para seus medalhistas do basquete masculino e do feminino?

b) Dentre os países da tabela, faz sentido medir o sucesso de um país na competição pelo produto de sua posição no quadro de medalhas pela premiação total paga. Um valor menor indica um país que conseguiu uma boa classificação sem gastar tanto. Na tabela, qual seria o país de melhor desempenho considerando tal medida? Qual seria o pior?

c) Os nadadores dos EUA ficaram com 23% do total pago pelo país. Sabendo que os Estados Unidos ganharam 28 medalhas na natação e com os dados da tabela, podemos deduzir que eles tiveram medalha em alguma modalidade de revezamento?

Obs.: Não adianta citar aqui que você sabe que eles venceram o revezamento 4 X 100m Feminino. É olimpíada de Matemática, né!

O Brasil decidiu pagar valores maiores por medalha para esportes coletivos. Para esportes com 2 a 6 atletas pagou o dobro da premiação. E, para esportes com 7 ou mais atletas, pagou ainda mais. Os valores pagos por cada tipo de medalha foram diretamente proporcionais aos pagos para os esportes individuais. Por exemplo, sendo a , b e c os valores pagos respectivamente pelas medalhas de ouro, prata e bronze em um esporte envolvendo 7 ou mais atletas, então $\frac{a}{65} = \frac{b}{39} = \frac{c}{23}$. Esses valores totais maiores, é claro, são divididos igualmente entre os medalhistas em cada modalidade.

d) Sabe-se que o Brasil obteve:

- Ouro no Voleibol de Praia Feminino – 2 atletas;
- Prata no Futebol Feminino – 22 atletas;
- Bronze na Ginástica por Equipes Feminina – 5 atletas;
- Bronze no Judô por Equipes – 10 atletas;
- Bronze no Voleibol Feminino – 13 atletas.

As outras medalhas do Brasil foram em esportes individuais. Determine as quantidades de medalhas de ouro, prata e bronze que o Brasil obteve em esportes individuais.

e) Quanto o Brasil pagou no total pelas medalhas individuais?

f) Determine quanto aproximadamente cada jogadora da equipe de Voleibol recebeu de premiação, em dólares.

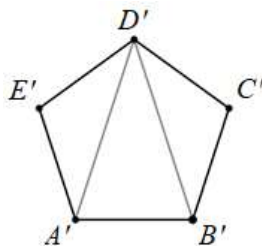
PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

O estudo de construções geométricas usando apenas um compasso e uma régua sem marcações é uma parte fundamental da geometria. Existem algumas variações desse estudo. Por exemplo, construções com um compasso e uma régua que possui apenas duas marcações. Chamaremos a régua com apenas duas marcações de *régua marcada*. A seguir temos uma representação simplificada de uma régua marcada.



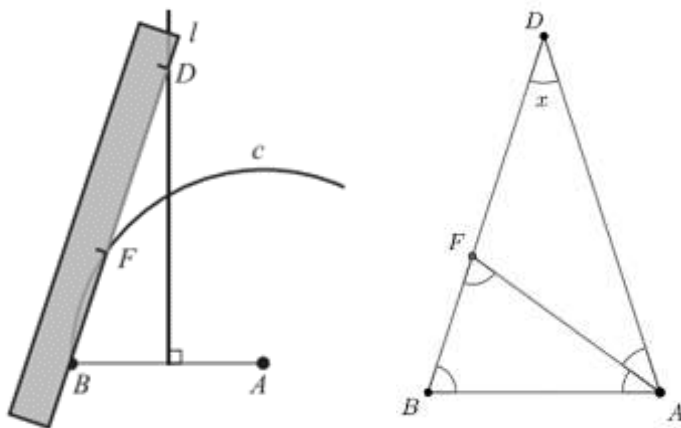
O que essa régua tem de diferente é que ela pode ser usada para medir exatamente uma distância. Arquimedes mostrou que um compasso e uma régua marcada é possível trissectar um ângulo (dividir o ângulo em três partes iguais). Essa tarefa é impossível com um compasso e uma régua sem marcação. Nesse problema veremos como construir um pentágono regular apenas com um compasso e uma régua marcada. Vale destacar que essa construção também é possível com compasso e régua sem marcações, mas é mais complicada.

Primeiro vamos lembrar do pentágono regular. Na figura a seguir temos um pentágono regular $A'B'C'D'E'$. Todos os lados possuem mesma medida e todos os ângulos internos possuem mesma medida. Pode-se provar que cada ângulo interno tem medida 108° . Vamos chamar o triângulo $A'B'D'$ de triângulo central do pentágono.



a) Determine as medidas dos três ângulos internos do triângulo central do pentágono.

Agora vamos para a construção mesmo. Por simplicidade, suponha que a régua marcada possui duas marcações com distância 1 (a unidade de medida não é importante). Marque um segmento AB com medida 1. Usando a régua e o compasso trace a mediatriz l do segmento AB . Usando o compasso trace a circunferência c de centro A e raio AB . Agora vamos usar as marcações da régua. Posicione a régua marcada passando pelo ponto B , de modo que uma das marcações fique sobre a circunferência c e a outra sobre a reta l , esses pontos onde as marcações encontram essas figuras serão F e D , respectivamente.



b) Justifique por que $AF = FD$.

Trace agora os segmentos AD , BD e AF .

c) Sendo x a medida do ângulo $A\hat{D}B$, determine as medidas dos ângulos $D\hat{A}F$, $A\hat{F}B$, $A\hat{B}F$ e $B\hat{A}F$ em função de x .

d) Prove que esse triângulo ABD possui ângulos iguais aos do triângulo central do pentágono regular.

e) Explique como encontrar os pontos C e E para completar o pentágono regular $ABCDE$ que estamos desenhando, usando apenas régua e compasso.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Uma *composição* de um número inteiro positivo n é uma sequência ordenada de inteiros positivos cuja soma é igual a n . Por exemplo, uma composição de 11 é $(3; 2; 1; 4; 1)$, pois $3 + 2 + 1 + 4 + 1 = 11$. Para cada composição, observe se cada termo é par (P) ou ímpar (I). No nosso exemplo, obtemos as *paridades* $(I; P; I; P; I)$. Uma *composição palíndroma de paridade (cpp)* é uma composição cujas paridades são as mesmas se lidas do começo para o final e do final para o começo (por isso palíndroma). O nosso exemplo $(3; 2; 1; 4; 1)$ é uma cpp. Por outro lado, $(2; 3; 3; 3)$ não é uma cpp de 11, pois suas paridades são $(P; I; I; P)$, que do final para o começo é $(I; I; I; P)$ e é diferente.

Nosso problema consiste em contar a quantidade de cpps de 2024.

O número 2024 é muito grande, não? Então usaremos algumas ferramentas para isso. Para cada $n \geq 2$, vamos chamar o número de cpps n de P_n . Nosso problema agora é calcular P_{2024} . Começemos com um caso pequeno: $n = 2$. Há somente duas cpps para 2: $(1; 1)$ e (2) . Portanto, $P_2 = 2$.

a) Sabe-se que $P_4 = 6$. Liste todas as 6 cpps de 4.

Vamos precisar de mais ferramentas. Considere a seguinte classificação das cpps:

A: o primeiro e o último termo são iguais a 1 (exemplos: $(1; 3; 2; 1; 1)$, (1))

B: o primeiro e o último termo são maiores do que 1 (exemplos: $(2; 3; 5; 4)$, (4))

C: o primeiro termo é 1 e o último termo é maior do que 1 (exemplo: $(1; 3; 4; 5; 5)$)

D: o primeiro termo é maior do que 1 e o último termo é 1 (exemplo: $(3; 4; 4; 4; 1)$)

Vamos chamar de A_n , B_n , C_n e D_n as quantidades de cpps de n das classes A, B, C e D, respectivamente. Veja que $P_n = A_n + B_n + C_n + D_n$. Por exemplo, $A_2 = 1$, $B_2 = 1$, $C_2 = 0$ e $D_2 = 0$.

b) Classifique todas as cpps de 4 que você listou no item a e indique os valores de A_4 , B_4 , C_4 e D_4 .

Agora, considere as seguintes associações entre cpps de n e cpps de $n + 2$: tome uma cpp de n e faça, se possível, as seguintes operações:

I: adicione dois novos termos, ambos iguais a 1: o primeiro e o último. Por exemplo, $(1; 4; 3; 2; 5) \rightarrow (1; 1; 4; 3; 2; 5; 1)$.

II: some 1 ao primeiro termo e ao último; caso a cpp tenha só um termo, some 2 a esse termo. Por exemplo, $(1; 4; 3; 2; 5) \rightarrow (2; 4; 3; 2; 6)$ e $(4) \rightarrow (6)$.

III: se o primeiro termo é 1, somar 2 ao último termo. Por exemplo, $(1; 4; 3; 2; 5) \rightarrow (1; 4; 3; 2; 7)$ e $(1; 4; 3; 2; 1) \rightarrow (1; 4; 3; 2; 3)$.

IV: se o último termo é 1, somar 2 ao primeiro termo. Por exemplo, $(3; 1; 1) \rightarrow (5; 1; 1)$ e $(1; 4; 3; 2; 1) \rightarrow (3; 4; 3; 2; 1)$.

c) Complete a figura a seguir, em que colocamos na fila superior as duas cpps de 2 e na fila inferior seis espaços para você colocar as cpps de 4. Na figura, indique usando flechas, como nos exemplos anteriores, as associações entre as cpps. Indique nas flechas qual operação (I, II, III ou IV) foi usada. Você deve copiar sua figura na folha de respostas.

(1; 1)

(2)

d) A partir das operações, explique por que $A_{n+2} = P_n$ e $B_{n+2} = P_n$ para todo n par com $n \geq 2$.

Veja que dos resultados do item d e de $A_2 = B_2$ podemos afirmar que $A_n = B_n$ para todo n par com $n \geq 2$.

e) Encontre expressões para C_{n+2} e D_{n+2} usando A_n , B_n , C_n , D_n e P_n (não necessariamente você usará todos).

f) Encontre uma relação entre P_{n+2} e P_n para todo n par com $n \geq 2$ e a partir dela encontre uma expressão fechada para P_{2024} . Sua expressão não deve ter reticências.

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Dados dois inteiros positivos a e b , o máximo divisor comum de a e b ($mdc(a, b)$) é o maior inteiro positivo que é divisor de ambos e o mínimo múltiplo comum de a e b ($mmc(a, b)$) é o menor inteiro positivo que é múltiplo de ambos. A seguinte relação conecta os valores do mdc e do mmc .

$$mdc(a, b) \cdot mmc(a, b) = a \cdot b$$

Veremos uma demonstração interessante dessa relação.

Vamos estudar um exemplo numérico. Seja $a = 12$ e $b = 8$. Considere um retângulo 12×8 desenhado num plano quadriculado com vértices $A = (0,0)$, $B = (12,0)$, $C = (12,8)$ e $D = (0,8)$, como mostrado nas figuras.

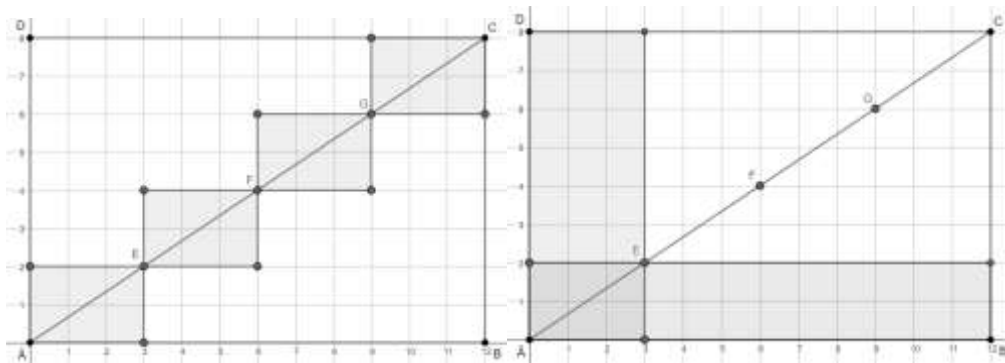


Figura 1

Figura 2

A diagonal AC passa por 5 pontos com coordenadas inteiras A, E, F, G e C . Construimos retângulos com lados horizontais e verticais e diagonais ligando pontos consecutivos com coordenadas inteiras da diagonal AC . Os retângulos possuem mesmas dimensões e o número k de retângulos é o $\text{mdc}(12,8)$, veja figura 1.

Por outro lado, a área de cada retângulo com lado AB e vértices com coordenadas inteiras é numericamente igual a um múltiplo de 12 e a área de cada retângulo com lado AD e vértices com coordenadas inteiras é numericamente igual a um múltiplo de 8. O mmc vai ser numericamente igual à menor área que é formada por um retângulo com lado AB e também por um retângulo com lado AD . Isso acontece quando os retângulos passam pelo ponto E , como você pode observar na figura 2.

a) Calcule o $\text{mdc}(12,8)$ e o $\text{mmc}(12,8)$.

b) A partir das figuras, prove que $\text{mdc}(12,8) \cdot \text{mmc}(12,8) = 12 \cdot 8$.

Agora vamos estudar a demonstração da relação. Considere um retângulo $a \times b$ com vértices $A = (0,0)$, $B = (a,0)$, $C = (a,b)$ e $D = (0,b)$. A diagonal AC passa por $k + 1$ pontos com coordenadas inteiras que ordenados da esquerda para a direita são $A_1 = A, A_2, \dots, A_k, A_{k+1} = C$.

Considere os retângulos com lados horizontais e verticais e diagonais ligando pontos consecutivos com coordenadas inteiras da diagonal AC , como visto na figura 1. Suponha que há dois desses retângulos com dimensões diferentes, $a_r \times b_r$ e $a_s \times b_s$, com $r < s$. Se posicionarmos o $a_r \times b_r$ dentro do $a_s \times b_s$ fazendo coincidir o vértice inferior esquerdo, então teríamos um novo ponto com coordenadas inteiras na diagonal. Isso é uma contradição. Podemos concluir que todos os k retângulos possuem mesmas dimensões $a_0 \times b_0$.

c) Prove que k é um divisor comum de a e b . Prove também que se houvesse um divisor comum maior que k , então haveria um ponto com coordenadas inteiras em AC entre A_1 e A_2 . Dessa forma, concluímos que k é o $\text{mdc}(a,b)$.

Dica: você pode utilizar um argumento similar ao que usamos no parágrafo anterior.

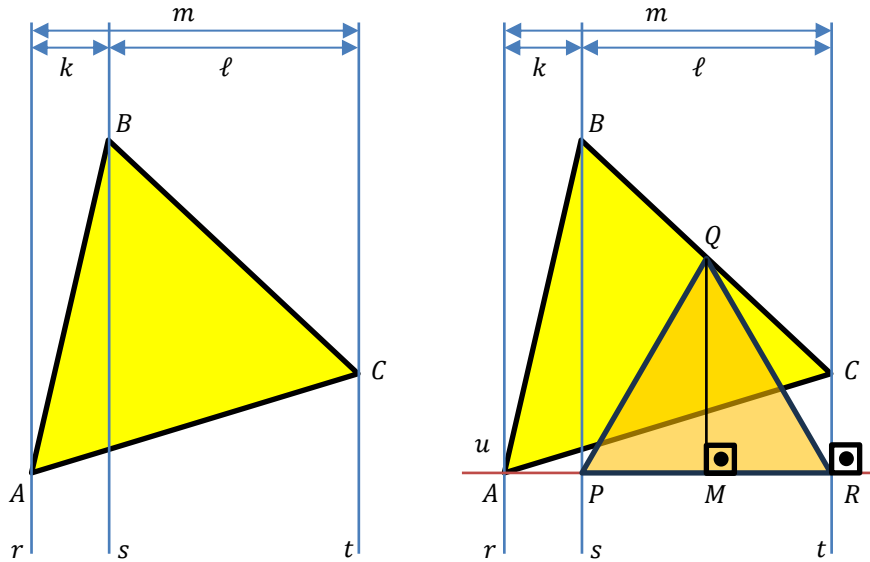
Vamos chamar de retângulos horizontais os retângulos com lado AB no interior do retângulo $ABCD$ que possuem vértices com coordenadas inteiras e de retângulos verticais os retângulos com lado AD no interior do retângulo $ABCD$ e vértices com coordenadas inteiras. As áreas dos retângulos horizontais são sempre números múltiplos de a e as áreas dos retângulos verticais são sempre números múltiplos de b .

d) Suponha que um retângulo horizontal H tem área igual a um retângulo vertical V . Suponha que as dimensões de H são $a \times s$ e de V são $r \times b$. Prove que o ponto de coordenadas inteiras $P = (r,s)$ está na diagonal AC .

e) Os retângulos H e V possuem área mínima quando $P = A_2 = (a_0, b_0)$ e o valor da área é o $\text{mmc}(a,b)$. Usando as áreas mínimas de H e V , a quantidade k de retângulos e área do retângulo $ABCD$; prove que $\text{mdc}(a,b) \cdot \text{mmc}(a,b) = a \cdot b$.

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

Considere três retas verticais r, s e t . A distância entre r e s é k , a distância entre s e t é ℓ e a distância entre r e t é $m = k + \ell$. Nesse problema, encontraremos a medida do lado de um triângulo equilátero que tem um vértice em cada uma dessas três retas.



Seja ABC o triângulo que desejamos encontrar, com $A \in r$, $B \in s$ e $C \in t$. Podemos escolher o ponto A qualquer e vamos supor que os pontos B e C estão acima do ponto A como na figura. Casos em que B e C não estão ambos acima de A podem ser tratados de modo similar, mas não faremos isto nesse problema.

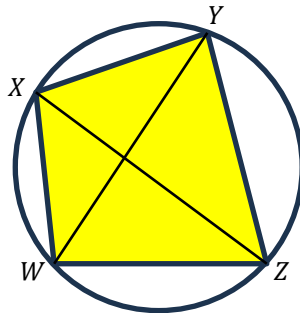
Para encontrar a medida do lado do triângulo ABC , construímos uma reta u que passa por A e é perpendicular às três retas r , s e t . Essa reta corta s em P e t em R . Seja M o ponto médio de PR e seja Q o ponto médio do segmento BC (sim, nesse momento nós não sabemos onde está o Q).

a) Justifique por que o quadrilátero $AQCR$ é cíclico.

Um quadrilátero convexo $XYZW$ é cíclico quando existe uma circunferência que passa pelos seus quatro vértices. Pode-se provar que $XYZW$ é cíclico quando pelo menos uma das igualdades a seguir é verdadeira:

$$\angle XYZ + \angle ZWX = 180^\circ; \quad \angle YZW + \angle WXY = 180^\circ \text{ (ângulos internos opostos somam } 180^\circ \text{)}$$

$$\angle XZY = \angle XWY; \quad \angle YXZ = \angle YWZ; \quad \angle ZXW = \angle ZYW; \quad \angle WYX = \angle WZX \text{ (um lado é "enxergado" pelos outros dois vértices sob o mesmo ângulo)}$$



b) Prove que o triângulo PQR é equilátero.

Você pode querer utilizar que se uma das igualdades listadas anteriormente for verdadeira, então o quadrilátero é cíclico e todas as outras também são verdadeiras.

A partir dos itens anteriores, podemos encontrar o Q a partir de P e R sem saber as posições de B e C . Basta construir o triângulo equilátero PQR , com Q do mesmo lado que B e C com relação à reta u .

c) Mostre que $MQ = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e $AM = k + \frac{\ell}{2}$.

d) Mostre que $AQ^2 = \frac{k^2 + \ell^2 + m^2}{2}$.

e) Prove que o lado de ABC é $\sqrt{\frac{2(k^2 + \ell^2 + m^2)}{3}}$.

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Nesse problema, vamos estudar um novo conjunto numérico: os *números duais*. Tais números são da forma $w = a + b\epsilon$, com a e b reais, em que ϵ é tal que $\epsilon^2 = 0$ e $\epsilon \neq 0$. É claro que ϵ não é um número real. Podemos entendê-lo como uma espécie de "símbolo" com propriedades aritméticas muito interessantes, como veremos neste problema.

Para fazermos as operações, somamos e subtraímos colocando ϵ em evidência. Já a multiplicação é feita usando a propriedade distributiva e aplicando $\epsilon^2 = 0$, quando for necessário.

Por exemplo, considerando $w_1 = 2 + 3\epsilon$ e $w_2 = 3 - 4\epsilon$,

- $w_1 + w_2 = 2 + 3\epsilon + 3 - 4\epsilon = (2 + 3) + (3 - 4)\epsilon = 5 - \epsilon$;
- $w_1 - w_2 = 2 + 3\epsilon - (3 - 4\epsilon) = (2 - 3) + (3 - (-4))\epsilon = -1 + 7\epsilon$;
- $w_1 w_2 = (2 + 3\epsilon)(3 - 4\epsilon) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4\epsilon) + 3\epsilon \cdot 3 + 3\epsilon \cdot (-4\epsilon) = 6 - 8\epsilon + 9\epsilon - 12\epsilon^2 = 6 + \epsilon - 12 \cdot 0 = 6 + \epsilon$.

a) O inverso de um número dual w é o número $x + y\epsilon$, com x e y reais, tal que $w \cdot (x + y\epsilon) = 1$. Por exemplo, para encontrar o inverso de $2 + 3\epsilon$, fazemos

$$(2 + 3\epsilon)(x + y\epsilon) = 1 \Leftrightarrow 2x + 2y\epsilon + 3x\epsilon + 3y\epsilon^2 = 1 \Leftrightarrow 2x + (3x + 2y)\epsilon = 1.$$

Como $1 = 1 + 0\epsilon$, identificamos $2x$ com 1 e $3x + 2y$ com 0, ou seja,

$$\begin{cases} 2x = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Com isso, o inverso de $2 + 3\epsilon$ é $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\epsilon$.

Agora é a sua vez! Encontre o inverso de $3 - 4\epsilon$.

b) Encontre uma fórmula para o quadrado de $a + b\epsilon$, com a e b reais.

Uma das aplicações dos números duais é encontrar as *sombras* de uma sequência de números inteiros. Sob certas condições, a sombra de uma sequência de inteiros também é formada por inteiros, e por isso, números duais são úteis para demonstrar que algumas sequências são formadas somente por números inteiros.

Para encontrar uma sombra de uma sequência a_n , usamos uma equação que relaciona cada termo com alguns termos anteriores (uma *recursão*). Depois, trocamos a_n por $w_n = a_n + b_n\epsilon$ e obtemos uma nova recursão para calcular b_n . Em seguida escolhemos quantos termos iniciais forem necessários para determinar b_n . Tal sequência é uma sombra de a_n .

Para ilustrar, vamos encontrar uma sombra da sequência $(1; 2; 3; 4; \dots)$, em que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, e assim por diante. Ou seja, uma sombra da sequência tal que $a_n = n$, para n inteiro positivo.

Usaremos a recursão $a_n = a_{n-1} + 1$. Trocando por $w_n = a_n + b_n\epsilon$, obtemos $a_n + b_n\epsilon = a_{n-1} + b_{n-1}\epsilon + 1$. Assim, $a_n = a_{n-1} + 1$, a recursão original; e $b_n = b_{n-1}$, a recursão para a sua sombra. Escolhendo como valor inicial um determinado b_1 , obtemos a sequência constante $(b_1; b_1; b_1; \dots)$, pois cada termo é igual ao anterior.

A sequência sombra obtida acima não tem muita graça. Mas nem tudo está perdido! Como $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$, $a_{n-1}a_{n+1} = a_n^2 - 1 \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{a_{n-1}}$ é outra recursão para $(1; 2; 3; 4; \dots)$, com a diferença de que esta depende de dois termos iniciais.

c) Faça a substituição $w_n = a_n + c_n\epsilon$ em $w_{n-1}w_{n+1} = w_n^2 - 1$ e encontre uma recursão para c_n , sequência sombra de a_n .

Dica: lembre-se que $a_n = n$, para n inteiro positivo.

d) Prove que $c_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ é uma possível sombra de a_n . Ou seja, mostre que a expressão algébrica apresentada satisfaz a recursão obtida no item anterior.

PROBLEMA 7 – Valor: 6 pontos

Sequências do tipo $a, a + d, a + 2d$ são denominadas *progressões aritméticas* (PA) de tamanho 3, ou 3-PA. Você sabia que se pintarmos os números inteiros positivos com r cores (uma r -coloração), ou seja, se atribuirmos uma dessas r cores para cada inteiro positivo, sempre é possível encontrar a, b e c distintos em progressão aritmética (ou seja, com $b = a + d$ e $c = a + 2d$ para algum d) da mesma cor?

Esse resultado surpreendente foi demonstrado pelo matemático holandês Bartel Leendert van der Waerden em 1926 e publicado em 1927. Vamos estudar uma demonstração desse resultado.

Mais especificamente, vamos provar que para qualquer r existe o número $W(r, 3)$ tal que, para quaisquer $W(r, 3)$ inteiros consecutivos pintados com r cores, existe uma 3-PA monocromática (com todos os termos da mesma cor).

a) Faça uma coloração dos números de 1 a 8 com as cores A (de azul) e B (de branco) de modo que não exista uma 3-PA monocromática.

Vamos definir algumas ferramentas. Para cada par $\{a, a + d\}$ em que os dois números possuem a mesma cor, chamaremos $a + 2d$ de *foco* desse par. Dizemos que s pares

$$\{a_1, a_1 + d_1\}, \{a_2, a_2 + d_2\}, \dots, \{a_s, a_s + d_s\}$$

são *cor-focados* se, ao mesmo tempo:

- cada um deles é monocromático;
- cada um possui uma cor diferente;
- os pares têm o mesmo foco, ou seja, $a_1 + 2d_1 = a_2 + 2d_2 = \dots = a_s + 2d_s$.

A chave para provar o resultado é o seguinte lema:

Lema: Para cada $1 \leq s \leq r$, existe $n(s)$ tal que: qualquer r -coloração de $n(s)$ números consecutivos contém uma 3-PA monocromática ou s pares cor-focados.

Vamos provar esse lema por indução em s . A técnica da indução consiste em provar para um termo inicial, no nosso caso $s = 1$, e provar que se vale para um número, então vale para o número seguinte, no nosso caso provaremos que se existe $n(s - 1)$, então existe $n(s)$.

b) Prove que $n(1) = r + 1$ satisfaz as condições do lema para $s = 1$.

Suponha que existe $n(s - 1)$ e tome $m = n(s - 1)$. Agora considere o seguinte número

$$N = 2m(r^{2m} + 1)$$

Provaremos que $n(s) = N$ satisfaz as condições do lema.

c) Existem quantas maneiras de colorir $2m$ números consecutivos com r cores?

d) Separe os N números $\{1, 2, \dots, N\}$ em $\frac{N}{2m}$ blocos de tamanho $2m$: $B_1 = \{1, 2, \dots, 2m\}$, $B_2 = \{2m + 1, 2m + 2, \dots, 4m\}$, ..., $B_{N/2m} = \{N - 2m + 1, N - 2m + 2, \dots, N\}$. Explique por que existem dois blocos I e J coloridos exatamente com as mesmas cores (primeiro número do bloco I com a mesma cor do primeiro número do bloco J , segundo número do bloco I com a mesma cor do segundo número do bloco J e assim por diante).

Seja d a diferença entre cada termo de J e o termo correspondente em I . Podemos representar de maneira simplificada que $J = I + d$.

Lembre que I tem $2m = 2n(s - 1)$ números consecutivos. Considere os m menores números de I , formando I' . Se I tem uma 3-PA monocromática, então já temos a propriedade desejada. Caso contrário, I' não tem 3-PA monocromática e então há $s - 1$ pares $\{a_1, a_1 + d_1\}, \{a_2, a_2 + d_2\}, \dots, \{a_{s-1}, a_{s-1} + d_{s-1}\}$ contidos em I' cor-focados de foco $f = a_1 + 2d_1 = \dots = a_{s-1} + 2d_{s-1}$.

e) Prove que os seguintes s pares formados por números de I e J são cor-focados:

$$\{a_1, a_1 + d_1 + d\}, \{a_2, a_2 + d_2 + d\}, \dots, \{a_{s-1}, a_{s-1} + d_{s-1} + d\} \text{ e } \{f, f + d\}$$

Você deve provar que cada um é monocromático, as suas s cores são distintas, e que possuem todos o mesmo foco.

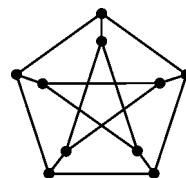
f) Prove que se encontrarmos r pares cor-focados $\{a_1, a_1 + d_1\}, \{a_2, a_2 + d_2\}, \dots, \{a_r, a_r + d_r\}$, então temos uma 3-PA monocromática. Então se tomarmos $W(r, 3) = 2n(r)$ teremos uma 3-PA monocromática com os números de 1 a $W(r, 3)$.

Com ideias similares pode-se demonstrar que existe $W(r, k)$ e para qualquer r -coloração dos inteiros positivos existe uma k -PA monocromática, mas não vamos estudar esse caso geral nesta prova.

XLVIII OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (agosto de 2024)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.
- Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
 - (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
 - (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

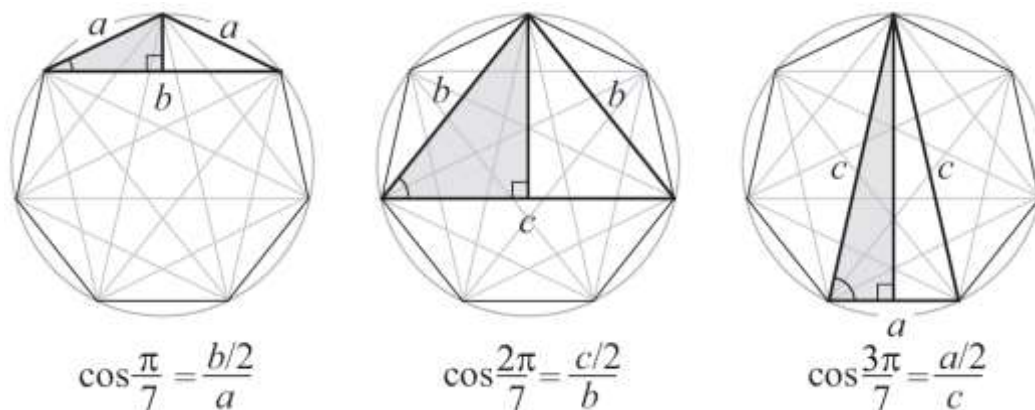
PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Nesse problema, vamos estudar o produto

$$\cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cos \frac{3\pi}{2n+1} \cdots \cos \frac{n\pi}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Por exemplo, para $n = 3$, temos $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}$. Neste problema usaremos as medidas dos ângulos em radianos, sigla rad. Para converter radianos para graus usamos $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

Uma maneira bem bacana de calcular esse produto de cossenos é usar um polígono regular de $2n+1$ lados inscrito em um círculo. No caso $n = 3$, para o qual $2n+1 = 7$, usamos um heptágono regular. Note que um ângulo que subtende um arco com k lados mede $\frac{1}{2} \frac{k}{2n+1} 2\pi = \frac{k\pi}{2n+1}$, $1 \leq k \leq n$. Com isso, conseguimos as seguintes relações nos triângulos retângulos:



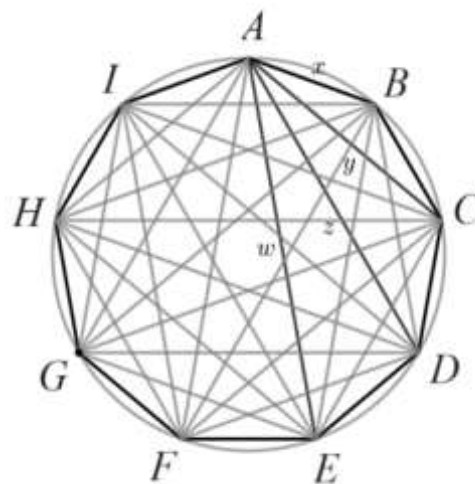
Com isso,

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{b}{2a} \cdot \frac{c}{2b} \cdot \frac{a}{2c} = \frac{1}{8}.$$

Considere o eneágono (polígono de 9 lados) regular da figura a seguir. Seja x o comprimento de cada lado e sejam y , z e w os comprimentos das diagonais em ordem crescente.

- a) Usando o triângulo IAB , prove que $\cos \frac{\pi}{9} = \frac{y/2}{x}$.
- b) Calcule $\cos \frac{2\pi}{9}$, em função de x , y , z e w . Lembre-se de indicar o triângulo usado e justificar as medidas do ângulo e dos lados.
- c) Calcule $\cos \frac{4\pi}{9}$, em função de x , y , z e w . Lembre-se de indicar o triângulo usado e justificar as medidas do ângulo e dos lados.
- d) Calcule o valor numérico de

$$\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{3\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}.$$



PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

Uma equação de Pell é da forma $x^2 - dy^2 = 1$ em que d é um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito. Estamos interessados em encontrar os valores inteiros positivos de x e y .

Pode-se mostrar que tais soluções são da forma $(x_n; y_n)$, obtidas fazendo $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^n$, em que $(x_0; y_0)$ é a solução fundamental, ou seja, com x_0 e y_0 mínimos. Essa solução fundamental pode ser fácil para alguns valores de d : por exemplo, para $d = 3$, é fácil notar que $(2; 1)$ é a solução fundamental, pois $2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$. Mas para outros valores de d , a solução fundamental pode ser difícil de encontrar; tente, por exemplo, encontrar para $d = 13$. Não é óbvio que sempre existe uma solução! (Spoiler: sempre existe.)

Uma maneira de encontrar a solução é usando matrizes! Mais especificamente, usamos K -matrizes, que são obtidas multiplicando matrizes da forma $K_n = \begin{bmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, n inteiro positivo.

a) Apresente a K -matriz $K_2 \cdot K_3$ e responda: toda K -matriz é igual a K_n para um certo valor de n ?

b) Calcule o determinante de K_n .

Pode-se provar que $B_d = \begin{bmatrix} dy_0 & x_0 \\ x_0 & y_0 \end{bmatrix}$ é uma K -matriz. A nossa tarefa é encontrar essa K -matriz, de onde podemos extrair $(x_0; y_0)$ diretamente da segunda linha (ou coluna). K -matrizes têm várias características, mas a que usaremos aqui é que o determinante delas é sempre 1 ou -1 (lembre-se do item b). No nosso caso, como $\det(B_d) = dy_0 \cdot y_0 - x_0 \cdot x_0 = dy_0^2 - x_0^2$, queremos $\det(B_d) = -1$.

Para tanto, definimos primeiro uma operação auxiliar: sendo M e N matrizes 2×2 ,

$$M \odot N = MK_0N = M \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} N.$$

Agora, começamos com uma matriz M que não necessariamente é uma K -matriz: $M_0 = \begin{bmatrix} d & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$, em que a é um inteiro positivo e a^2 é o quadrado perfeito mais próximo de d . No nosso exemplo $d = 13$, começamos com $M_0 = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (que não é uma K -matriz).

c) O próximo passo é encontrar o inteiro positivo b tal que $\begin{bmatrix} 13 & b \\ b & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ tenha todas suas quatro entradas múltiplas de $\det(M_0) = 13 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = -3$. Entre os valores de b que têm essa propriedade, escolha aquele em que $b > 0$ e tal que b^2 é o mais próximo possível de $d = 13$. Encontre esse valor de b .

d) Se tudo deu certo, você encontrou $\begin{bmatrix} 13 & b \\ b & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78 & 21 \\ 21 & 6 \end{bmatrix}$. Dividindo essa matriz por 3, obtemos $M_1 = \begin{bmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$. Repita o procedimento, ou seja, encontre o inteiro positivo c tal que $\begin{bmatrix} 13 & c \\ c & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ tem todas suas quatro entradas múltiplas de $\det(M_1) = 26 \cdot 2 - 7 \cdot 7 = 3$, com $c > 0$ e c^2 o mais próximo possível de $d = 13$.

e) Seja $M_2 = \frac{1}{\det(M_1)} \begin{bmatrix} 13 & c \\ c & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$. Se tudo deu certo, $\det(M_2) = 1$. Quase! Para terminar, a nossa solução é $M_3 = M_2 \odot M_2$. Termine a conta e encontre a solução fundamental de $x^2 - 13y^2 = 1$.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Já pegou uma calculadora e dividiu 987654321 por 123456789? (Você não precisa fazer isso agora; a conta dá 8,0000000729 ...). Isso é muito, mas muito perto de 8!

Isso não é coincidência, e vamos ver por que agora.

a) Sabe-se que para quaisquer x real e m inteiro positivo

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1} = \frac{x^m - 1}{x - 1}.$$

Vamos calcular $S = 1 + 2n + 3n^2 + \dots + (n-1)n^{n-2}$. Note que $nS = n + 2n^2 + \dots + (n-1)n^{n-1}$. Tendo essas duas contas em mente, mostre que $S = n^{n-1} - \frac{n^{n-1}-1}{(n-1)^2}$.

b) Encontre uma fórmula para $T = (n-1) + (n-2)n + (n-3)n^2 + \dots + 2n^{n-3} + n^{n-2}$.

c) Determine $S - (n-2)T$.

Se você tiver feito corretamente, esse valor deve ser menor que T , para $n \geq 3$.

d) Para que valor de n o valor de $\frac{S}{T}$ reflete a divisão de 987654321 por 123456789, justificando por que esse resultado é tão próximo de 8?

e) Qual é o inteiro mais próximo da divisão de 999897969594 ... 030201 por 010203040506 ... 979899? Não se esqueça de justificar sua resposta.

f) Temos que $\frac{999897969594 \dots 030201}{010203040506 \dots 979899} = \dots, \underbrace{00 \dots 0}_k a \dots$, em que temos k zeros após a vírgula antes do primeiro algarismo não nulo a .

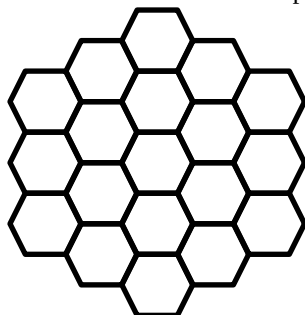
Encontre o valor de k .

Dica 1: pode aproximar 99 para 100 quando isso facilitar as contas.

Dica 2: numa soma ou subtração, se uma parcela for 100 vezes maior que a outra, você pode ignorar a outra.

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

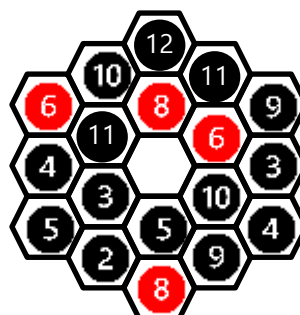
Catan é um jogo de grande sucesso e um dos motivos é o fato de que os jogadores podem ter um tabuleiro com novas características a cada vez que jogam. A seguir apresentamos um tabuleiro simplificado, mostrando suas dezenove casas.



As tais “novas características” são definidas em parte pela colocação no tabuleiro de 18 marcadores numéricos: dois para cada número de 3 a 11, excluindo o 7; um para o 2 e um para o 12. Os números 6 e 8 são escritos em vermelho (se sua prova está em preto e branco, então os números 6 e 8 estão em marcadores cinzas) – chamaremos esses quatro marcadores simplesmente de *vermelhos* – os demais são escritos em preto – chamaremos esses quatorze marcadores simplesmente de *pretos*. Na montagem de um tabuleiro, uma das dezenove casas fica vazia, as outras dezoito recebem cada uma um marcador numérico obedecendo a restrição de que marcadores vermelhos não podem ser colocados em casas adjacentes, ou seja, com um lado em comum. A seguir mostramos um exemplo de tabuleiro (simplificado) válido e um de tabuleiro inválido.



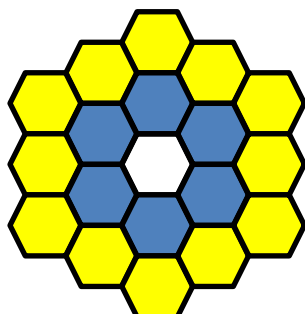
Tabuleiro válido



Tabuleiro inválido

Neste problema contaremos o número de maneiras de colocar os marcadores vermelhos.

Nós denominamos as 12 casas externas de *anel externo*; temos ainda a casa central e denominamos as 6 casas restantes de *anel interno*.



Dividiremos a contagem em casos levando em conta o total de marcadores em cada uma das três regiões com a seguinte notação: $[X, Y, Z]$ em que X é o número de marcadores na casa central ($X = 0$ ou $X = 1$); Y é o número de marcadores no anel interno e Z é o número de marcadores no anel externo.

Nos itens de a até e , você deve considerar que (isso vai simplificar a contagem☺):

- Os quatro marcadores vermelhos são iguais (ignore os números 6 e 8 neles).
 - O tabuleiro está fixado sobre uma mesa, ou seja, não pode ser girado nem refletido.
- O item a deve ajudar a entender as condições acima.

a) Há 210 maneiras de colocar os marcadores vermelhos tais que $[X, Y, Z] = [0, 1, 3]$. Justifique.

Dica: Você pode querer utilizar neste problema que o número de soluções, com x_i pertencente aos naturais, da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ é $\binom{n+k-1}{k-1}$. Além disso, se você sabe que alguma quantidade y_i é positiva, vale a pena fazer a substituição $y_i = x_i + 1$; nesse caso, y_i é natural.

b) Determine o número de maneiras de colocar os marcadores vermelhos tais que $[X, Y, Z] = [0, 3, 1]$.

c) Quantas são as maneiras tais que $[X, Y, Z] = [0, 2, 2]$?

d) Vamos contar as maneiras tais que $[X, Y, Z] = [0, 0, 4]$, que é o número de maneiras de colocar 4 peças vermelhas em um círculo com 12 casas, sem que haja duas casas vizinhas ocupadas. Para isso:

- escolhemos os espaços entre as casas contando a quantidade de soluções com x_i natural da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m$ para um m conveniente (qual é?);
- depois, escolhemos onde colocar a primeira peça (12 maneiras) e colocamos as peças usando as soluções acima;
- finalmente, note que contamos repetido quatro vezes, pois a primeira peça pode ser qualquer uma das quatro peças colocadas, e portanto dividimos por 4.

Com isso, quantas são as maneiras tais que $[X, Y, Z] = [0, 0, 4]$?

e) Qual é o total de maneiras de colocar os marcadores vermelhos?

f) Calcule a probabilidade de que, ao distribuirmos aleatoriamente os 18 marcadores numéricos no tabuleiro, os quatro marcadores vermelhos não sejam adjacentes.

PROBLEMA 5 – Valor: 3 pontos

Neste problema, a partir de uma extensão da definição de derivada (não se preocupe, você não precisa saber o que é isso), demonstraremos que existem infinitos números primos. (Bem legal, né? A gente aqui da OPM, acha! 😊)

Seja Z_+^* o conjunto dos inteiros positivos, definimos a função $D: Z_+^* \rightarrow Z_+$, que chamaremos de *derivada aritmética*, por meio das duas propriedades a seguir:

- $D(xy) = xD(y) + yD(x)$ para quaisquer x, y inteiros positivos;
- $D(p) = 1$ para todo p primo positivo.

Observe que:

- $D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + 1 \cdot D(1) \Leftrightarrow D(1) = 2 \cdot D(1) \Leftrightarrow D(1) = 0$ e, por isso, o conjunto de chegada da função deve incluir o zero.
- $D(2) = D(3) = D(5) = 1$, por exemplo.
- $D(4) = D(2 \cdot 2) = 2 \cdot D(2) + 2 \cdot D(2) = 4$.
- $D(6) = D(2 \cdot 3) = 2 \cdot D(3) + 3 \cdot D(2) = 5$.
- $D(12) = D(2 \cdot 6) = 2 \cdot D(6) + 6 \cdot D(2) = 16$ e
 $D(12) = D(3 \cdot 4) = 3 \cdot D(4) + 4 \cdot D(3) = 16$.

(Ainda bem! Pois, caso contrário, D não seria uma função.)

De fato, pode-se demonstrar que, sendo $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t}$ a fatoração de n em primos:

$$D(n) = n \cdot \left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \dots + \frac{\alpha_t}{p_t} \right).$$

Por exemplo, $D(12) = D(2^2 \cdot 3) = 12 \cdot \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right) = 16$.

Você pode utilizar a fórmula acima para $D(n)$ sempre que desejar em todos os itens do problema.

a) Prove que, sendo n e k números inteiros positivos:

$$D(n^k) = kn^{k-1}D(n).$$

(Essa é uma das motivações para denominarmos D derivada aritmética.)

Então podemos definir $L: Z_+^* \rightarrow Q_+$, a função *derivada logarítmica aritmética*, como $L(n) = \frac{D(n)}{n}$ para qualquer n inteiro positivo.

b) Demonstre que, para quaisquer x, y inteiros positivos:

$$L(xy) = L(x) + L(y).$$

(Um bom motivo para ter logaritmo no nome de L , não é?)

Dica: na fórmula de $D(n)$ que vimos não tem problema colocar alguns primos com expoente 0.

Para o próximo item nós necessitaremos da função piso de x , para x real. Essa função é denotada por $\lfloor x \rfloor$ e é tal que $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x . Por exemplo: $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$; $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ e $\lfloor 3 \rfloor = 3$.

c) Para todo n inteiro positivo, prove que:

$$L(n!) = \sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p \leq n}} \frac{1}{p} \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots \right)$$

em que o somatório passa por todos os primos p com $p \leq n$.

d) A partir do item anterior conclua que $L(n!) < n$, para todo n inteiro positivo.

Dica 1: você pode querer utilizar que para $-1 < x < 1$ a soma da PG infinita é dada por

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

Dica 2: você pode querer utilizar também que

$$\sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p \leq n}} \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right)$$

em que p é um primo positivo.

e) Considerando o item d, mostre que existem infinitos inteiros positivos n tais que $L(n) \leq 2$.

Agora estamos preparados para provar que existem infinitos números primos. Vamos supor, por absurdo, que existe um maior número primo que denominaremos q .

f) Sendo $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t}$ a fatora  o de n em primos, demonstre que

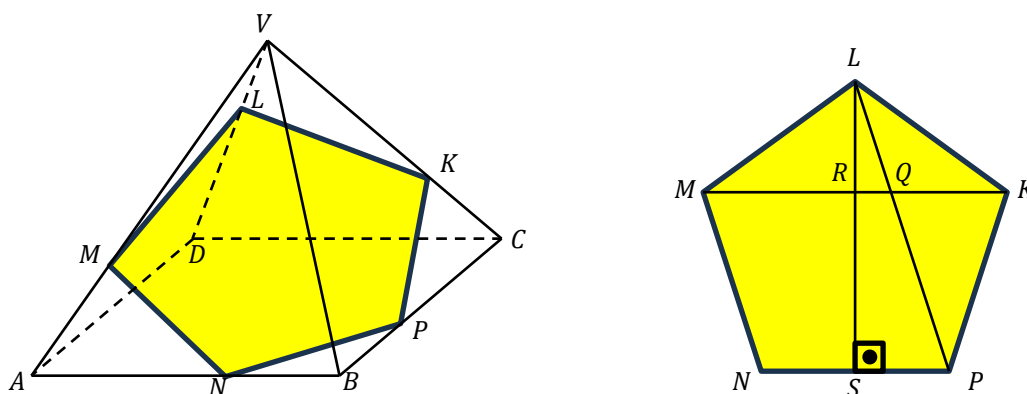
$$L(n) = \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \dots + \frac{\alpha_t}{p_t} \geq \frac{1}{q} \cdot \frac{\ln n}{\ln q}$$

g) A partir dos dois itens anteriores, prove que existem infinitos números primos.

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

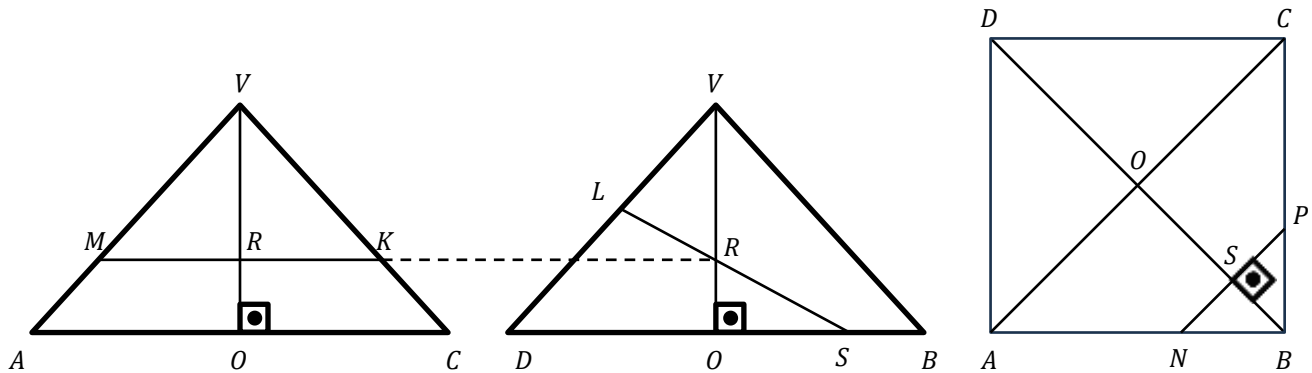
Muitos problemas de geometria métrica espacial podem ser resolvidos usando as técnicas de geometria plana. Para tanto, é importante considerar secções que descrevam bem a figura tridimensional. Como exemplo, vamos considerar o seguinte problema:

Seja $VABCD$ uma pirâmide regular de base quadrada com vértice V e base $ABCD$. Um plano corta essa pirâmide, determinando uma secção que é um pentágono regular $KLMNP$ de lado 1. Calcular o volume da pirâmide.



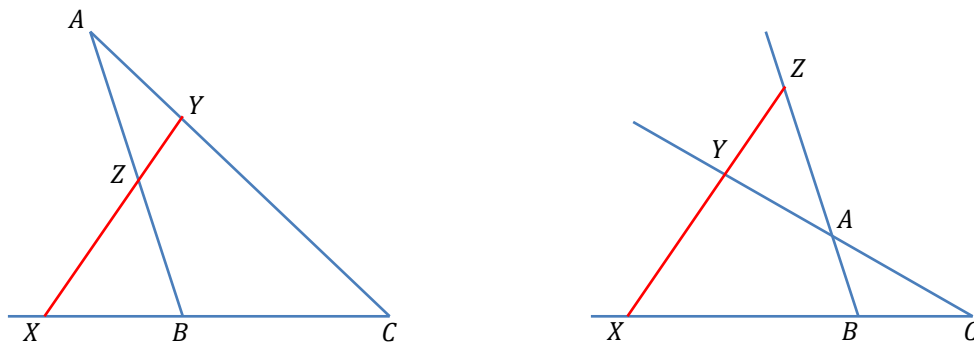
Usaremos o fato de que as diagonais do pentágono medem $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vamos definir S e R como os pontos médios de NP e MK , respectivamente, e o ponto Q como a intersecção de LP com a diagonal MK . Você pode também usar sem provar que $\frac{LR}{LS} = \frac{1}{\phi^2}$.

Um dos motivos pelos quais    melhor considerar secções    que as figuras tridimensionais não ficam totalmente acuradas no papel (que tem só duas dimensões). Nesse problema, vamos considerar as secções VAC , VBD e a base $ABCD$. Como há simetria em relação ao plano VBD o ponto R está na secção VBD e o segmento BD é perpendicular ao segmento PN .



a) Seja $d = AC = BD$ a diagonal da base e O o centro da base. Observando a secção VAC , mostre que $\frac{VR}{VO} = \frac{\phi}{d}$.

Quando estamos trabalhando com secções planas podemos usar teoremas de geometria plana, como o Teorema de Menelaus. Suponha que uma reta corte os lados (ou prolongamentos) do triângulo ABC em $X \in BC$, $Y \in CA$ e $Z \in AB$.



O Teorema de Menelaus garante que

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1.$$

Você pode usar o Teorema de Menelaus nos itens a seguir sem demonstrá-lo.

b) Considere a secção VBD , escreva a equação obtida aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo ROS com a reta VD .

c) Usando os itens anteriores, determine a medida do segmento DS em função de ϕ e prove que $BD = \phi^2$.

Você pode querer usar o fato de que $\phi^2 = \phi + 1$.

d) Vamos calcular agora a altura $h = VO$ do tetraedro. Mostre que $RS^2 = h^2 \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^2 + \frac{\phi^2}{4}$.

e) Usando as propriedades do pentágono regular, determine as medidas de LS^2 e RS^2 em função de ϕ .

f) Prove que $h = \frac{\phi^2}{2}$ e conclua, mostrando que o volume da pirâmide é $\frac{\phi^6}{12}$.

Você pode querer usar que o volume de uma pirâmide é $\frac{1}{3}BH$, onde B é a área da base e H é a altura do vértice em relação à base.

PROBLEMA 7 – Valor: 6 pontos

Neste problema vamos apresentar e indicar os passos da demonstração de um resultado muito importante na pesquisa em combinatória, o *Lema da Regularidade de Szemerédi*. Esse resultado foi obtido por Endre Szemerédi na década de 70 e é usado até hoje para obter novos resultados.

Antes de apresentar o lema precisamos de algumas definições. Primeiro temos um grafo $G = (V, E)$ é formado por um conjunto V de vértices e um conjunto E de arestas que são pares não ordenados de vértices. Por exemplo, se $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 4\}\}$ então o grafo $G = (V, E)$ pode ser representado por um triângulo mais um ponto com uma aresta a mais saindo de um vértice. Seguindo nas definições, para $A, B \subset V$ disjuntos (sem interseção) denotamos por $e(A, B)$ o número de arestas com um vértice em A e outro em B . Denotamos também a *densidade* do par (A, B) por

$$d(A, B) = \frac{e(A, B)}{|A| \cdot |B|}.$$

Note que $d(A, B) = 0$ quando não há arestas ligando A e B e $d(A, B) = 1$ quando ligamos todos os possíveis pares de vértices de A com B .

Dados $\varepsilon > 0$ (geralmente imaginamos ε pequeno) e $A, B \subset V$ disjuntos, dizemos o par (A, B) é ε -regular se para quaisquer $X \subset A$ e $Y \subset B$ satisfazendo $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$ vale que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Intuitivamente, todo par (X, Y) de subconjuntos com tamanho razoável de A e B tem essencialmente a mesma densidade que o grafo todo.

Dado o grafo $G = (V, E)$ dizemos que uma partição $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ dos vértices de V é uma *separação* dos vértices em que cada vértice de V vai para exatamente um conjunto. Dizemos que uma partição é ε -regular quando $|V_0| \leq \varepsilon n$, $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_k|$ e no máximo um total de εk^2 pares (V_i, V_j) , com $1 \leq i < j \leq k$ **não** são ε -regulares (ou seja, a maioria dos pares são ε -regulares).

Agora podemos enunciar o lema.

Lema da Regularidade de Szemerédi: para todos $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$, existe M que depende apenas de m e ε tal que para qualquer grafo G com pelo menos M vértices existe k com $m \leq k \leq M$ de modo que G admite uma partição ε -regular $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$.

Para evitar se alongar demais não falaremos sobre o conjunto V_0 nem como deixar as partes iguais. Quem quiser se aprofundar pode pesquisar sobre essas partes depois da prova.

Para a demonstração deste resultado, para cada grafo G com n vértices vamos definir sobre cada partição $P = \{V_1, \dots, V_k\}$ um valor $d_2(P)$ que chamaremos de *energia* dessa partição. Para cada par de conjuntos da partição seja $d_2(V_i, V_j) = \frac{e(V_i, V_j)^2}{|V_i| \cdot |V_j| \cdot n^2}$.

Defina $d_2(P)$ como

$$d_2(P) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} d_2(V_i, V_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2.$$

a) Prove que $d_2(P) \leq 1$.

Uma partição P' é chamada de um *refinamento* de uma partição P se cada conjunto da partição P é a união de conjuntos da partição P' . Vamos provar que $d_2(P') \geq d_2(P)$ sempre que P' for um refinamento de P .

Para isso basta fazer um refinamento de cada vez, então considere que o conjunto $V_1 = X \cup Y$ com X e Y disjuntos. Vamos comparar as energias de $P = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ e $P' = \{X, Y, V_2, \dots, V_k\}$.

b) Prove que $d_2(V_1, V_i) \leq d_2(X, V_i) + d_2(Y, V_i)$ para todo i com $2 \leq i \leq k$.

c) Prove que $d_2(P') \geq d_2(P)$.

Agora vamos estudar o que acontece num par que **não** é ε -regular. Seja (X, Y) um par de alguma partição eu não é ε -regular. Pela definição existem conjuntos X_1 e Y_1 com $|X_1| > \varepsilon|X|$ e $|Y_1| > \varepsilon|Y|$ tais que $|d(X_1, Y_1) - d(X, Y)| > \varepsilon$. Considere os refinamentos usando $X_1, X_2 = X \setminus X_1, Y_1$ e $Y_2 = Y \setminus Y_1$.

d) Prove que

$$\varepsilon^4 \leq \sum_{1 \leq r, s \leq 2} \frac{|X_r| |Y_s|}{|X| |Y|} (d(X_r, Y_s) - d(X, Y))^2.$$

e) Usando o item anterior prove que

$$\sum_{1 \leq r, s \leq 2} \frac{|X_r| |Y_s|}{|X| |Y|} d(X_r, Y_s)^2 \geq d(X, Y)^2 + \varepsilon^4.$$

Agora vamos para o seguinte lema.

Lema: Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices e seja $P = \{V_1, \dots, V_k\}$ uma partição de V que não é ε -regular. Então existe um refinamento P' de P tal que valem as seguintes afirmações

- i. $d_2(P') \geq d_2(P) + \varepsilon^5$;
- ii. $|P'| \leq k \cdot 2^{k-1}$.

Vejam como provar esse lema. Para cada par (V_i, V_j) que não é ε -regular podemos encontrar $V'_i \subset V_i$ e $V'_j \subset V_j$ com $|V'_i| \geq \varepsilon|V_i|$, $|V'_j| \geq \varepsilon|V_j|$ e $|d(V'_i, V'_j) - d(V_i, V_j)| > \varepsilon$. Podemos definir $V_i^{1,j} = V'_i$, $V_i^{2,j} = V_i \setminus V'_i$, $V_j^{1,i} = V'_j$, $V_j^{2,i} = V_j \setminus V'_j$ e usar neles o resultado obtido no item e. Porém não vamos refinar apenas um par, mas todos os pares de uma vez. Para cada i com $1 \leq i \leq k$, defina a partição $W_i = \{W_{i,1}, \dots, W_{i,k_i}\}$ de V_i na qual para cada $W \in W_i$ vale que $u, v \in W$ se, e somente se, para todo $j \neq i$ tal que $1 \leq j \leq k$ vale $u, v \in V_i^{1,j}$ ou $u, v \in V_i^{2,j}$. Ou seja, cada W consiste nos elementos de V_i que estiveram juntos em toda divisão de V_i e V_j quando (V_i, V_j) não é ε -regular. O refinamento P' de P é induzido pelas partições W_i .

f) Prove que para cada i temos $k_i \leq 2^{k-1}$ e $|P'| \leq k \cdot 2^{k-1}$.

Veja que temos

$$d_2(P') = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \sum_{1 \leq r \leq k_i} \sum_{1 \leq s \leq k_j} d_2(W_{i,r}, W_{j,s}).$$

g) A partir disso, prove que

$$d_2(P') \geq \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \sum_{1 \leq r, s \leq 2} \frac{|V_i^{r,j}||V_j^{s,i}|}{|V_i||V_j|} d(V_i^{r,j}, V_j^{s,i})^2$$

Nesta expressão nos pares (V_i, V_j) que são ε -regulares podemos tomar $V_i^{1,j} = V_i$ e $V_j^{1,i} = V_j$.

h) Prove que $d_2(P') \geq d_2(P) + \varepsilon^5$. Lembre-se que se uma partição não é ε -regular, então mais que εk^2 pares (V_i, V_j) **não** são ε -regulares. Considere nesse item que cada V_i tem $\frac{n}{k}$ vértices.

i) Explique por que para qualquer ε o número de refinamentos em partições que não são ε -regulares é finito e conclua que os refinamentos chegarão numa partição ε -regular.