

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Ngày thi thứ nhất: **17/4/2010**

Thời gian: **180** phút (không kể thời gian giao đề)

Hướng dẫn này có 08 trang, 08 hình vẽ

CÂU I (3,5 điểm)

1. (1,0 điểm) Đối với trạm hay máy thăm dò:

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r \rightarrow \frac{d\vec{v}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r \\ \frac{d\vec{v}}{d\alpha} &= -\frac{GM}{r^2} \frac{dt}{d\alpha} \vec{e}_r \quad (1) \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}) \end{aligned}$$

Theo định luật bảo toàn momen động lượng:

$$rmv_{\perp} = Rmu \rightarrow r \left(r \frac{d\alpha}{dt} \right) = Ru \rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{Ru}{r^2} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1): $d\vec{v} = -\left(\frac{GM}{Ru} d\alpha \right) \vec{e}_r \quad (3) \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm})$

Đối với trạm vũ trụ ta cũng có phương trình (3) vì phương trình này không chứa khối lượng của chúng.

Phương trình (3) cho thấy $d\vec{v}$ là như nhau đối với cả trạm và máy khi véc tơ vị trí quay được một góc $d\alpha$ như nhau.

$$\vec{u}_{\alpha} - \vec{u}_0 = \vec{v}_{\alpha} - \vec{v}_0$$

$\Rightarrow \vec{v}_{\alpha} - \vec{u}_{\alpha} = \vec{v}_0 - \vec{u}_0 = \vec{V}$ (điều phải chứng minh) $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

2. (0,75 điểm) Áp dụng bảo toàn mô men động lượng cho máy thăm dò:

$$rm(u - V \sin \alpha) = Rmu \rightarrow r(\alpha) = \frac{uR}{u - V \sin \alpha} = \frac{R}{1 - \frac{V}{u} \sin \alpha} \quad (4)$$

3. (0,5 điểm) Điều kiện quỹ đạo kín là $e = \frac{V}{u} < 1 \Rightarrow V < u$.

(cách 2): Năng lượng toàn phần của máy thăm dò:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{m(u^2 + V^2)}{2} - \frac{GMm}{R} \quad (5)$$

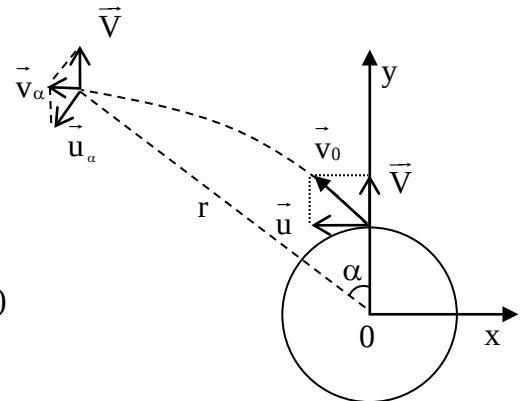
$$\text{Mặt khác: } \frac{GMm}{R^2} = \frac{mu^2}{R} \quad (6)$$

Từ (5) và (6): $E = \frac{m(V^2 - u^2)}{2}$. Điều kiện quỹ đạo kín là $E < 0$, suy ra $V < u$

4. (0,5 điểm) Quỹ đạo không kín (parabol hoặc hypecbol) khi $V \geq u$ hay $\frac{u}{V} \leq 1 \dots\dots (0,25 \text{ điểm})$

Từ (4) ta có $r(\alpha) = \frac{uR}{u - V \sin \alpha}$

$r \rightarrow \infty$ khi $u - V \sin \alpha \rightarrow 0$ hay $\sin \alpha \rightarrow \frac{u}{V}$



Hình 6

Vậy $\alpha_{gh} = \arcsin \frac{u}{V}$ (0,25 điểm)

5. (0,75 điểm) Áp dụng bảo toàn mô men động lượng:

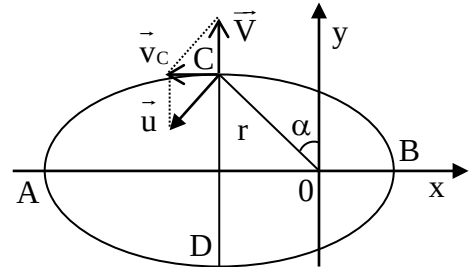
Từ (4) ta có $r(\alpha) = \frac{uR}{u - V \sin \alpha}$

$r_{\max}$ khi $\sin \alpha = 1$ hay $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (điểm cực viễn nằm trên trục X)

$$r_{\max} = \frac{uR}{u - V} \quad (4a)$$

$r_{\min}$ khi $\sin \alpha = -1$ hay $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ (điểm cực cận trên trục x)

$$r_{\min} = \frac{uR}{u + V} \quad (4b) \quad \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm})$$



Hình 7

Tại đỉnh C (Hình 7):

$$\vec{v}_c \perp \vec{V} \rightarrow u^2 = v_c^2 + V^2 \rightarrow v_c = \sqrt{u^2 - V^2}$$

Bán trục lớn:

$$a = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min}) = \frac{1}{2}Ru \left(\frac{1}{u - V} + \frac{1}{u + V} \right) = \frac{Ru^2}{u^2 - V^2} \quad \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm})$$

Mặt khác cũng tại C

$$v_c \cos \alpha \cdot r = Ru \text{ mà } r \cos \alpha = b$$

$$\text{Nên } b = \frac{Ru}{v_c} = \frac{Ru}{\sqrt{u^2 - V^2}} \quad \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm})$$

CÂU II (3 điểm)

1. (0,75 điểm) Giả thiết đường sức đi từ A (dưới góc α , đến B. Tại B đường sức này hợp với BA một góc β . Xét mặt cầu bán kính r rất nhỏ bao quanh điện tích A. Có thể coi cường độ điện trường qua mặt cầu chỉ do điện tích 4q gây ra. Số đường sức trong mặt nón (có nửa góc ở đỉnh là α , trục là AB) sẽ là

$$\Delta N = E \cdot \Delta S = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 2\pi r \cdot r(1 - \cos \alpha) = \frac{4q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha)$$

Tương tự, ta có số đường sức trong hình nón đỉnh B, có trục BA có nửa góc ở đỉnh β là

$$\Delta N' = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \beta)$$

$$\text{Do } \Delta N' = \Delta N \text{ nên } \frac{4q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \beta);$$

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \frac{\beta}{2}; \sin \frac{\beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \quad \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Để đường sức đến được B thì phương trình: $\sin \frac{\beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ này phải có nghiệm $\rightarrow$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \leq 1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} \leq 30^\circ \Rightarrow \alpha \leq 60^\circ \quad \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm})$$

2.

a. (0,5 điểm) Khi thả đồng thời, theo định luật bảo toàn năng lượng:



Hình 8

$$\frac{-4kq^2}{r_0} = \frac{-4kq^2}{r} + 2 \cdot \frac{mv^2}{2}. \text{ Suy ra: } v = \sqrt{\frac{4kq^2}{mr_0} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right)} \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm})$$

$$\text{Khi giữ cố định một quả thì: } \frac{-4kq^2}{r_0} = \frac{-4kq^2}{r} + \frac{mv^2}{2}; v_1 = \sqrt{\frac{8kq^2}{mr_0} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right)} = v\sqrt{2}.$$

Ở mỗi vị trí (ứng với r xác định), vận tốc tăng $\sqrt{2}$ lần $\rightarrow$ vận tốc trung bình tăng $\sqrt{2}$ lần, quãng đường tăng 2 lần nên thời gian tăng $\sqrt{2}$ lần: $\tau_1 = \tau\sqrt{2} \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm})$

b. (1,75 điểm) Ta có $dr = vdt$, suy ra $dt = \frac{dr}{v} = \frac{dr}{\sqrt{\frac{4kq^2}{mr_0} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right)}}$. Theo giả thiết, khi thả từ

khoảng cách r_0 thì $\tau = \int_0^\tau dt = \int_{r_0}^{r_0/3} \sqrt{\frac{mr_0}{4kq^2 \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right)}} dr \quad (1) \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm})$

Khi thả chúng từ khoảng cách $2r_0$ thì sau τ' khoảng cách giữa chúng giảm 3 lần. Tương tự như

trên: $\tau' = \int_0^{\tau'} dt = \int_{2r_0}^{2r_0/3} \sqrt{\frac{m2r_0}{4kq^2 \left(\frac{2r_0}{r} - 1 \right)}} dr = \int_{2r_0}^{2r_0/3} \sqrt{\frac{m2r_0}{4kq^2 \left(\frac{r_0}{r/2} - 1 \right)}} 2d\frac{r}{2}$

Đổi biến tích phân: $r^* = r/2$ thì cận thay đổi như sau:

khi $r = 2r_0$ thì $r^* = \frac{2r_0}{2} = r_0$; $\rightarrow \tau' = 2\sqrt{2} \int_{r_0}^{r_0/3} \sqrt{\frac{mr_0}{4kq^2 \left(\frac{r_0}{r^*} - 1 \right)}} dr^* \quad (2) \dots\dots\dots (1,25 \text{ điểm})$

So sánh (2) với (1) ta thấy $\int_{r_0}^{r_0/3} \sqrt{\frac{mr_0}{4kq^2 \left(1 - \frac{r_0}{r^*} \right)}} dr^* = \tau$ nên $\tau' = 2\sqrt{2}\tau \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm})$

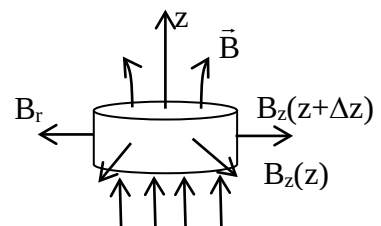
CÂU III (3,5 điểm)

1. (0,75 điểm) Xét một hình trụ tương tượng bao quanh ống dây, có chiều cao Δz và bán kính r . Từ thông toàn phần qua mặt trụ kín bằng 0:

$$\Phi = 0 \rightarrow B_z(z + \Delta z)\pi r^2 - B_z(z)\pi r^2 + B_r \cdot 2\pi r \Delta z = 0$$

$$\rightarrow B_r = \frac{r}{2} \frac{B_z(z) - B_z(z + \Delta z)}{\Delta z} = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$$

$$\rightarrow B_r = \frac{\alpha B_0 r}{2} = 0,4 \text{ T} \quad (1) \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$



Hình 9

Vì từ trường $\vec{B}$ đối xứng trụ nên các thành phần nằm ngang của các lực từ tác dụng lên các vòng dây của ống dây cân bằng nhau, nghĩa là lực từ tổng hợp tác dụng lên ống dây hướng theo phương Oz và có độ lớn:

$$F_z = 2\pi r N I B_r = 2\pi r N I \frac{\alpha B_0 r}{2} = \alpha B_0 \pi r^2 N I = b I \quad (2)$$

$$\text{với } b = \alpha B_0 \pi r^2 N = 2,512 \text{ (T.m)}$$

$$\text{Từ đó: } F_z = 0,377 \text{ (N)}. \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm})$$

2. (2,75 điểm)

a. Các lực tác dụng lên hệ:

- Lực hồi phục $F_{hp} = -kz = -m\omega_0^2 z \quad (\omega_0 = 2\pi f_0)$

- Lực cản của môi trường: $F_c = -\beta v$, với $\beta = \frac{2\gamma p_0 S}{v_a} = 26,4 \text{ (N.s.m}^{-1}\text{)}$

- Lực từ $F_z = bi$

Theo định luật II Newton:

$$ma = F_{hp} + F_c + F_z \rightarrow mz'' = -m\omega_0^2 z - \beta v + bi \quad (3) \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Mặt khác, ngoài điện áp e , ở ống dây có xuất hiện suất điện động cảm ứng ε_c và suất điện động tự cảm ε_L . Do đó theo định luật Ôm:

$$e + \varepsilon_c + \varepsilon_L = Ri \quad (4)$$

$$\text{với } \varepsilon_c = -\frac{d\Phi_z}{dt} = -\frac{d}{dt}[N\pi r^2 B_0(1 - \alpha z)] = \alpha B_0 \pi r^2 N z' \rightarrow \varepsilon_c = bz' \text{ và } \varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$$

Thay vào (4):

$$E_0 \cos \omega t + bz' - L \frac{di}{dt} = Ri \quad (5)$$

Trong phương trình (5) ta có thể bỏ đi số hạng $-L \frac{di}{dt}$, vì L nhỏ không đáng kể.

Từ (5) rút i ra:

$$e + bz' = Ri \rightarrow i = \frac{bz' + e}{R} \quad (6)$$

Thay (6) vào (3) ta được phương trình:

$$mz'' + \beta v + m\omega_0^2 z = b \left(\frac{bz' + e}{R} \right) \Rightarrow mz'' + \beta z' + m\omega_0^2 z = b \left(\frac{bz' + e}{R} \right)$$

$$\text{hay } z'' + \frac{1}{m} \left(\beta - \frac{b^2}{R} \right) z' + \omega_0^2 z = \frac{bE_0}{mR} \cos \omega t$$

$$\text{hay } z'' + \chi z' + \omega_0^2 z = D \cos \omega t \quad (7) \dots\dots\dots (0,75 \text{ điểm})$$

$$D = \frac{bE_0}{mR} = 10,47, \text{ còn } \beta = 26,4; b = 2,512; \chi = 413,7 \text{ Thay } z = A \cos(\omega t + \varphi_2) \text{ vào (7)}$$

ta được:

$$A(\omega) = \frac{D}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2}} = \frac{10,47}{\sqrt{(\omega^2 - 188,4^2)^2 + (413,7\omega)^2}} \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm})$$

b. Đồ thị hàm số $A = A(\omega)$ được vẽ trên hình 10. (0,25 điểm)

Tìm cực đại của A:

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega^2 - 188,4^2)^2 + (413,7\omega)^2 \right] = 0 \rightarrow \omega = 0$$

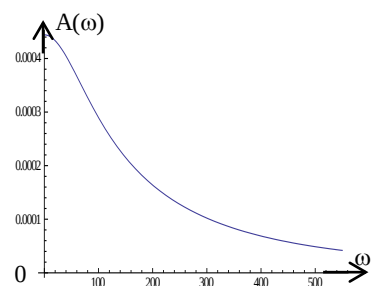
Như vậy A đạt cực đại khi $\omega = 0$. Không xảy ra cộng hưởng!
 (0,5 điểm)

c. Với tần số góc $\omega = \omega_0$.

Ta có: $z = A \cos(\omega t + \varphi_2)$;

$z'' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_2) = -\omega^2 z = -\omega_0^2 z$ Thay vào (7) ta có

$$\chi z' = D \cos \omega t; \frac{dz}{dt} = \frac{D}{\chi} \cos \omega t; z = \frac{D}{\chi\omega} \sin \omega t = 1,34 \cdot 10^{-4} \sin(188,4t). \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$



Hình 10

CÂU IV (3 điểm)

a. (1,25 điểm) Gọi a là hằng số cách tử thì $a \sin \varphi = 3\lambda$ (1)

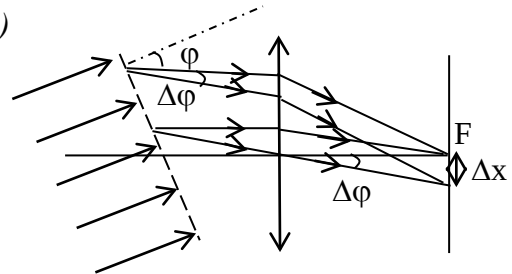
Lấy vi phân hai vế: $a \cos \varphi \Delta \varphi = 3 \Delta \lambda$ với $\Delta \lambda = \lambda' - \lambda$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\tan \varphi = \frac{\lambda \cdot \Delta \varphi}{\Delta \lambda}$ (3).....(0,75 điểm)

Mặt khác, từ hình 11 ta có : $\Delta \varphi = \frac{\Delta x}{f}$ nên

$$\tan \varphi = \frac{\lambda \cdot \Delta x}{f \cdot \Delta \lambda} = \frac{6912 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{0,74 \cdot 27} \approx 1,038 ; \varphi \approx 46,06^{\circ}, \sin \varphi \approx 0,72 \dots (0,25 \text{ điểm})$$

$$a = \frac{3\lambda}{\sin \varphi} \approx \frac{3 \cdot 0,6912}{0,72} \approx 2,9 \mu\text{m}. \dots (0,25 \text{ điểm})$$



Hình 11

b. (0,75 điểm) Từ $a \sin \varphi' = 4\lambda$

$$\sin \varphi' = \frac{4\lambda}{a} \approx \frac{4 \cdot 0,6912}{2,9} \approx 0,9534;$$

$$\varphi' \approx 72,44^{\circ} \dots (0,25 \text{ điểm})$$

Góc bởi chùm tia này hợp với pháp tuyến của cửa cách tử và quang trục của thấu kính là

$$(\varphi' - \varphi) = 72,44^{\circ} - 46,06^{\circ} = 26,38^{\circ}$$

Với λ' : $a \sin(\varphi' + \Delta \varphi') = 4\lambda'$

$$\sin(\varphi' + \Delta \varphi') = \frac{4\lambda'}{a} \approx \frac{4 \cdot 0,6939}{2,9} \approx 0,9571;$$

$$\varphi' + \Delta \varphi' \approx 73,16^{\circ}. \dots (0,25 \text{ điểm})$$

Góc bởi chùm tia này (hợp với pháp tuyến của cửa cách tử góc $(\varphi' + \Delta \varphi')$ và quang trục của thấu kính là

$$(\varphi' + \Delta \varphi' - \varphi) = 73,16^{\circ} - 46,06^{\circ} = 27,1^{\circ}$$

$$\Delta x' = f [\tan 27,1^{\circ} - \tan 26,38^{\circ}] \approx 0,74(0,5117 - 0,4960) \approx 0,012 \text{ cm}. \dots (0,25 \text{ điểm})$$

c. (1,0 điểm) (Xem hình 12) Cực đại bậc 2 được xác định bởi :

$$\sin \varphi = \frac{2\lambda}{a'}$$

$$\Delta \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{2\Delta \lambda}{a'}$$

$$\tan \varphi = \frac{\lambda \cdot \Delta \varphi}{\Delta \lambda}.$$

$$\text{Mặt khác } x = f \cdot \tan \varphi. \text{ Lấy vi phân : } \Delta x = \frac{f}{\cos^2 \varphi} \Delta \varphi; \Delta \varphi = \frac{\Delta x}{f} \cos^2 \varphi ;$$

$$\text{Từ đó ta có : } \tan \varphi = \frac{\lambda \cdot \Delta x}{\Delta \lambda \cdot f} \cos^2 \varphi = \frac{\lambda \cdot \Delta x}{\Delta \lambda \cdot f} \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} \right), \text{ với } \frac{\lambda \cdot \Delta x}{\Delta \lambda \cdot f} = \frac{6912 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{0,74 \cdot 27} \approx 0,519$$

$$\text{Giải phương trình } \tan^3 \varphi + \tan \varphi = 0,519. \dots (0,75 \text{ điểm})$$

Đây là phương trình bậc 3, có thể giải máy tính hoặc bằng đồ thị, ta có $\tan \varphi \approx 0,435$;

$$\varphi \approx 23,5^{\circ}; \sin \varphi \approx 0,3989 \rightarrow \text{hằng số cách tử } a' = \frac{\lambda}{\sin \varphi} = \frac{0,6912 \cdot 10^{-6}}{0,3989} \approx 1,73 \cdot 10^{-6} \text{ m}. \dots (0,25 \text{ điểm})$$

CÂU V (4 điểm)

1. (0,75 điểm) Vì tương tác giữa hai nguyên tử liên kế là đáng kể nên ta bỏ qua các tương tác khác. Sử dụng định luật II Newton, viết được các phương trình vi phân mô tả chuyển động của các nguyên tử ở ô mạng thứ n ($M > m$). Coi chiều dương của trục tọa độ hướng từ nguyên tử n đến (n+1)

$$\begin{cases} Mx_n'' = -\alpha(x_n - x_{n-1}) + \alpha(x_{n+1} - x_n) = \alpha(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) & (1) \\ mx_{n+1}'' = -\alpha(x_{n+1} - x_n) + \alpha(x_{n+2} - x_{n+1}) = \alpha(x_{n+2} + x_n - 2x_{n+1}) & (2) \end{cases}$$

2. (1,75 điểm)

Cách 1:

Nghiệm của hệ có dạng:

$$x_n = A_n \sin(aqn) \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow x_n' = -\omega A_n \sin(aqn) \sin(\omega t + \varphi); x_n'' = -\omega^2 A_n \sin(aqn) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow x_n'' = -\omega^2 x_n, x_{n\pm 1}'' = -\omega^2 x_{n\pm 1}, x_{n\pm 2}'' = -\omega^2 x_{n\pm 2}, \dots$$

$$\text{Đặt } A_{n-2} = A_n = A_{n+2} = \dots = A, A_{n-1} = A_{n+1} = \dots = B$$

Thay vào (1) và (2)

$$-AM\omega^2 \sin(aqn) = \alpha\{B \sin[aq(n+1)] + B \sin[aq(n-1)] - A \sin(aqn)\}$$

$$\Rightarrow A(2\alpha - M\omega^2) \sin(aqn) = \alpha B\{\sin[aq(n+1)] + \sin[aq(n-1)]\} = \alpha B 2 \sin(aqn) \cos(aq)$$

$$\Rightarrow A(2\alpha - M\omega^2) = 2\alpha B \cos(aq) \quad (3)$$

Tương tự:

$$Bm(2\alpha - M\omega^2) \sin[aq(n+1)] = \alpha A\{\sin[aq(n+2)] + \sin(aqn)\} = \alpha A 2 \sin[aq(n+1)] \cos(aq)$$

$$\Rightarrow B(2\alpha - m\omega^2) = 2\alpha A \cos(aq) \quad (4)$$

$$\text{Nhân 2 vế (3) và (4), ta có } AB(M\omega^2 - 2\alpha)(m\omega^2 - 2\alpha) = 4\alpha^2 AB \cos^2(aq) = 2\alpha^2 (1 + \cos 2aq)$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2 + Mm\omega^4 - 2\alpha(M+m)\omega^2 = 2\alpha^2 [1 + \cos(2aq)]$$

$$\Rightarrow \omega^4 - 2\alpha \frac{M+m}{Mm} \omega^2 + \frac{4\alpha^2}{Mm} \sin^2(aq) = 0 \quad (5)$$

Cách 2:

$$\text{Đặt } x_n = Ae^{i(aqn - \omega t)}, x_{n\pm 1} = Be^{i[aq(n\pm 1) - \omega t]}, x_{n\pm 2} = Ae^{i[aq(n\pm 2) - \omega t]} \text{ ta có}$$

$$x_n'' = -\omega^2 x_n; x_{n\pm 1}'' = -\omega^2 x_{n\pm 1}; x_{n\pm 2}'' = -\omega^2 x_{n\pm 2}, \dots$$

thay vào (1) và (2)

$$-M\omega^2 Ae^{i(aqn - \omega t)} = -\alpha(Be^{iaq} + Be^{-iaq} - 2A)e^{i(aqn - \omega t)}$$

$$(2\alpha - M\omega^2)A = -\alpha(Be^{iaq} + Be^{-iaq}) = -2\alpha B \cos(aq)$$

$$\text{Tương tự: } (2\alpha - m\omega^2)B = -2\alpha A \cos(aq)$$

$$\text{Nhân hai vế: } 4\alpha^2 + Mm\omega^4 - 2\alpha(M+m)\omega^2 = 4\alpha^2 \cos^2(aq)$$

$$\text{Suy ra: } \omega^4 - 2\alpha \frac{M+m}{Mm} \omega^2 + \frac{4\alpha^2}{Mm} [1 - \cos^2(aq)] = 0$$

$$\omega^4 + 2\alpha \frac{M+m}{Mm} \omega^2 + \frac{4\alpha^2}{Mm} \sin^2 aq = 0 \quad (5) \dots\dots\dots (1,25 \text{ điểm})$$

Phương trình này có 2 nghiệm:

$$\begin{cases} \omega_+ = \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) + \alpha \sqrt{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4}{Mm} \sin^2 aq}} = \sqrt{\frac{4\alpha}{3m} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 aq} \right)} & (6) \\ \omega_- = \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - \alpha \sqrt{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4}{Mm} \sin^2 aq}} = \sqrt{\frac{4\alpha}{3m} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 aq} \right)} & (7) \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

3. (0,5 điểm) Theo (6) và (7), ta thấy $\omega = \omega(q)$ là hàm số phụ thuộc vào q một cách tuần hoàn

với chu kì $\frac{\pi}{a}$: $\omega(q) = \omega(q + m\frac{\pi}{a})$. Vì vậy khi xét hệ thức tán sắc ta chỉ cần xét các giá trị của q

trong miền $-\frac{\pi}{2a} \leq q \leq \frac{\pi}{2a}$ (vùng Brillouin thứ nhất). (0,25 điểm)

Tại tâm và biên vùng Brillouin thứ nhất:

Ta xét nghiệm với dấu (-):

Khi $q = 0$, $\omega_- = 0$.

Khi q nhỏ, $\omega_- = aq\sqrt{\frac{\alpha}{4m}} \propto q$

Khi $q = \pm \frac{\pi}{2a}$, $\omega_- = \sqrt{\frac{2\alpha}{3m}}$

Ta xét nghiệm với dấu (+):

Khi $q = 0$, $\omega_+ = \sqrt{\frac{8\alpha}{3m}}$.

Khi $q = \pm \frac{\pi}{2a}$, $\omega_+ = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} > \sqrt{\frac{2\alpha}{3m}} \dots (0,25 \text{ điểm})$

4. (0,5 điểm) Đồ thị của $\omega = \omega(q)$ ở hình vẽ 13 gồm hai nhánh (nhánh âm và nhánh quang):

5. (0,5 điểm) Dựa vào hình vẽ ta có một nhận xét quan trọng. Trên phổ của $\omega = \omega(q)$ có một

khoảng giá trị từ $\omega_- = \sqrt{\frac{2\alpha}{3m}}$ đến giá trị

$\omega_+ = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}$ không ứng với nghiệm nào của

phương trình sóng truyền trong tinh thể, có nghĩa là không có dao động ứng với tần số nằm trong khoảng đó. Như vậy tại biên của vùng Brillouin tồn tại một miền cấm. Sóng ứng với tần số trong miền đó không lan truyền trong tinh thể được, mà bị hấp thụ mạnh.

CÂU VI (3 điểm)

1. (2,0 điểm) Hệ dao động quanh khối tâm. Mỗi quả cầu M , m nối với khối tâm bằng lò xo tương ứng có độ cứng k_1 , k_2 và chiều dài tự nhiên ℓ_1 , ℓ_2 :

$$\frac{M}{m} = \frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{k_1}{k_2}; \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}; k_1 = k \frac{M+m}{m}.$$

$$Mx_1'' = -k_1x_1; \omega = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{k \frac{M+m}{Mm}} = \sqrt{\frac{k}{\mu}}. \text{ Do đó } k = \mu\omega^2. \dots (0,5 \text{ điểm})$$

Coi hệ như một chất điểm dao động điều hòa với khối lượng rút gọn μ . Năng lượng E , động năng T , thế năng U và động lượng p của nó có các mối liên hệ:

$$T = \frac{p^2}{2\mu}, U = \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2, E = T + U = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2 \quad (1) \dots (0,5 \text{ điểm})$$

Từ hệ thức bất định:

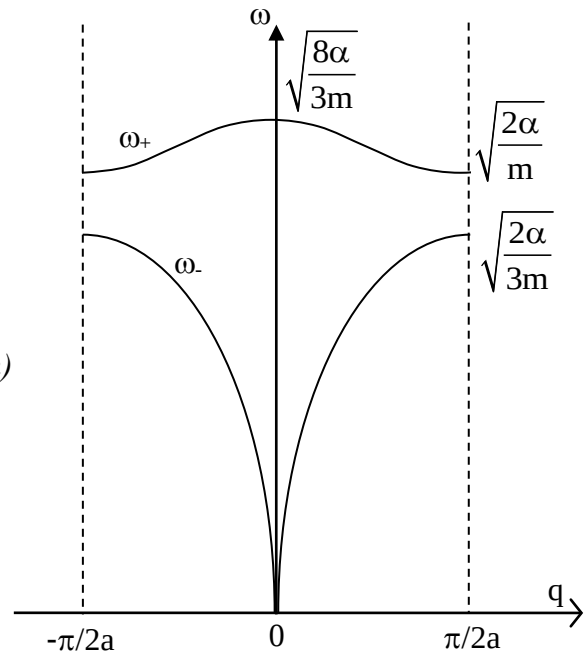
$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}; \Delta p = p - \bar{p} = p, \Delta x = x - \bar{x} = x$$

vì các giá trị trung bình đối với dao động điều hòa đều bằng không: $\bar{p} = 0, \bar{x} = 0 = 0$. Do đó:

$$p \cdot x \geq \frac{\hbar}{2} \rightarrow p^2 x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \rightarrow p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4x^2} \quad (2) \dots (0,5 \text{ điểm})$$

Thay bất đẳng thức (2) vào (1), ta có:

$$E \geq \frac{\hbar^2}{8\mu x^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2 \dots (0,25 \text{ điểm})$$



Hình 13

Khảo sát hàm số $y = \frac{\hbar^2}{8\mu x^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$.

Tại $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}$ hàm số đạt cực tiểu và có giá trị bằng $y_{\min} = y|_{x=\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}} = \frac{1}{2}\hbar\omega \rightarrow E_{\min} = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

Vậy ở trạng thái cơ bản, phân tử có kích thước cỡ $\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}$ và năng lượng $\frac{1}{2}\hbar\omega$ (0,25 điểm)

2. (1,0 điểm) Gọi G là khối tâm của hệ hai hạt, v_1 và v_2 là vận tốc các hạt trong hệ quy chiếu G. Vì hai hạt giống nhau nên $v_1 = -v_2 = v$. Động năng của hạt:

$$K = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = \alpha E_0. \text{ Suy ra: } \left(\frac{v}{c} \right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^2 = \frac{2\alpha + \alpha^2}{(1 + \alpha)^2} \quad (3)$$

Hạt A có vận tốc v đối với G, khối tâm G lại có vận tốc v đối với B. Theo công thức cộng vận tốc, trong hệ gắn với hạt B, hạt A có vận tốc

$$v' = \frac{v + v}{1 + \frac{v \cdot v}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2vc^2}{v^2 + c^2} \rightarrow \frac{v'}{c} = \frac{2vc}{v^2 + c^2} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$\text{và có động năng: } K' = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4v^2 c^2}{(c^2 + v^2)^2}}} - 1 \right)$$

$$K' = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4v^2 c^2}{(c^2 + v^2)^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} - 1 \right)$$

$$K' = m_0 c^2 \left(\frac{2v^2}{c^2 - v^2} \right) = m_0 c^2 \left(\frac{2}{\frac{c^2}{v^2} - 1} \right) = m_0 c^2 \left(\frac{2}{\frac{(1 + \alpha)^2}{2\alpha + \alpha^2} - 1} \right) = m_0 c^2 (4\alpha + 2\alpha^2)$$

Kết quả cuối cùng:

$$K' = 2E_0(2 + \alpha)\alpha \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

-----HẾT-----