

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Ngày thi thứ hai: **10/4/2011**Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Hướng dẫn này có 9 trang

CÂU I (4,0 điểm)**1. (1,50 điểm)** Áp suất tại M là $p = p_0 - \rho gy$.

Gọi R là bán kính cong tại M thì áp suất phụ là

$$\Delta p = \frac{\sigma}{R} \Rightarrow p = p_0 - \frac{\sigma}{R} \Rightarrow \rho gy = \frac{\sigma}{R} \quad (1) \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

Ứng với phần tử ds trên đường cong (thuộc tiết diện vuông góc với tấm kim loại) ta có:

$$dx = ds \cdot \cos\varphi; \quad dy = ds \cdot \sin\varphi.$$

Khi x tăng ($dx > 0$) thì φ giảm, $d\varphi < 0$ nên bán kính cong tại M là:

$$R = -\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{dx}{\cos\varphi d\varphi} = -\frac{dy}{\sin\varphi d\varphi} \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

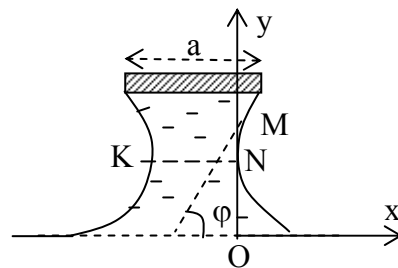
Thay vào (1) có: $\rho gy dy = -\sigma \sin\varphi d\varphi$ (2)

$$\rho gy dx = -\sigma \cos\varphi d\varphi \quad (3)$$

Tích phân hai vế của (2): $\int \rho gy dy = \int -\sigma \sin\varphi d\varphi$

$$\Rightarrow \rho g \frac{y^2}{2} = \sigma \cos\varphi + C$$

$$y = \sqrt{\frac{2\sigma \cos\varphi + C}{\rho g}}.$$



$$\text{Khi } y = 0 \text{ thì } \varphi = \pi \text{ nên } C = 2\sigma : y = \sqrt{\frac{2\sigma(\cos\varphi + 1)}{\rho g}} = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (4) \dots\dots\dots 0,50 \text{ điểm}$$

$$\text{Thay vào (3): } \rho g 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \cos \frac{\varphi}{2} dx = -\sigma \cos\varphi d\varphi = -\sigma(2\cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1)d\varphi$$

$$dx = -\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}}. \text{ Tích phân hai vế:}$$

$$x = -2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\varphi}{2} + \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4}\right) + C_1.$$

$$\text{Điều kiện ban đầu: } x = 0 \text{ thì } \varphi = \pi/2 \text{ nên: } C_1 = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \tan \frac{3\pi}{8}.$$

$$\text{Vậy } x = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \left[\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4}\right) - \ln \tan \frac{3\pi}{8} \right] \quad (5) \dots\dots\dots 0,50 \text{ điểm}$$

2. (1,75 điểm) Từ (4) ta thấy khi φ nhỏ nhất thì y lớn nhất. Có hai trường hợp:Trường hợp 1: Khi tấm kim loại có độ cao cực đại $y = h$ thì $\varphi = 0$ và $b > 0$ Trường hợp 2: Khi tấm kim loại có độ cao cực đại thì $b = 0$, góc φ có giá trị nhỏ nhất nhưng vẫn lớn hơn 0: $\varphi_{\min} > 0$; $\dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$

$$\text{TH1: Nếu } \varphi = 0 \text{ thì } x = \frac{a-b}{2}. \text{ Thay vào (5): } \frac{a-b}{2} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} + \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \tan \frac{3\pi}{8};$$

$b = a - 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}(\sqrt{2} - \ln \tan \frac{3\pi}{8})$. Vì $\tan \frac{3\pi}{8} = \tan 67,5^\circ \approx 2,4142$; $\ln \tan 67,5^\circ \approx 0,8814$ nên:

$$b = a - 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}(\sqrt{2} - \ln \tan \frac{3\pi}{8}) \approx a - 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}(1,41 - \ln 2,41) \approx a - 1,06\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (6)$$

Điều kiện xảy ra là $b > 0$ hay $a > 1,06\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ **0,5 điểm**

TH 2: Khi tấm kim loại có độ cao cực đại thì $b = 0$, góc φ có giá trị nhỏ nhất nhưng vẫn lớn hơn 0: $\varphi_{\min} > 0$; theo (4) $h = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \cos \frac{\varphi_{\min}}{2}$ **0,25 điểm**

Với $a > 1,1\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ theo (6) thì $b > 0$, xảy ra trường hợp 1

Từ (4), độ cao cực đại $h = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$; **0,25 điểm**

Bề rộng nhỏ nhất $b = a - 1,06\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ **0,25 điểm**

Ở sát tấm kim loại thì $\varphi = 0$, hiệu số áp suất tác dụng lên một đơn vị dài (theo cạnh dài) là $p_0 - (p_0 - \rho gh) = \rho gh$ nên: $F = P_1 + \rho gha = P_1 + 2a\sqrt{\rho g\sigma}$ **0,25 điểm**

3. (0,75 điểm) Với $a < \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$, xảy ra trường hợp 2. Điều đó có nghĩa khi nâng tấm kim loại lên một độ cao h lớn nhất, $\varphi = \varphi_{\min}$ thì $b = 0$.

Thay vào $x = 0,5a$ vào (5) ta tìm được $\alpha_{\min}$ và h :

$$0,5a = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\varphi_{\min}}{2}\right) + \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\left[\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_{\min}}{4}\right) - \ln \tan \frac{3\pi}{8}\right] \quad \dots\dots\dots \mathbf{0,25\ điểm}$$

$$\text{và } h = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \cos \frac{\varphi_{\min}}{2} \quad \dots\dots\dots \mathbf{0,25\ điểm}$$

Lực căng mặt ngoài tạo với phương nằm ngang một góc $\varphi_{\min}$ nên

$$F = P_1 + \rho gha + 2\sigma \sin \varphi_{\min} = P_1 + 2a\sqrt{\rho g\sigma} \cos \frac{\varphi_{\min}}{2} + 2\sigma \sin \varphi_{\min} \quad \dots\dots\dots \mathbf{0,25\ điểm}$$

CÂU II (4,5 điểm)

1.(2,0 điểm) a) Do lực tác dụng lên hành tinh là lực xuyên tâm nên momen động lượng $\vec{L}$ là bảo toàn, tức $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$. Lấy đạo hàm vector $\vec{Z}$ theo thời gian ta được:

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} - \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{1}{\alpha m} \vec{F} \times \vec{L} - \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Thay $\alpha = GMm$ và $\vec{F} = \vec{F}_N = \frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$ (lực hấp dẫn Newton) và lưu ý rằng $[\vec{e}_r \times \vec{e}_z] = \vec{e}_\theta$, ta có:

$$\frac{1}{GMm} \cdot \frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \times L \vec{e}_z = \frac{L}{mr^2} [\vec{e}_r \times \vec{e}_z] - \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \frac{L}{mr^2} \vec{e}_\theta - \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Lưu ý rằng $L = mr^2\omega = mr^2\dot{\theta}$. Thay vào biểu thức trên ta được $\frac{d\vec{Z}}{dt} = 0$. Nghĩa là $\vec{Z}$ là một vector không đổi. **0,50 điểm**

Xét vector $\vec{Z}$ tại điểm cận nhật P. Tại đây ta có: $r = r_p$, $v = v_p$ và $\theta = 0$. Khi đó

$$\vec{Z} = \frac{1}{GMm} \vec{v}_p \times \vec{L} - \vec{e}_r = \frac{1}{GMm} v_p \vec{e}_\theta \times L \vec{e}_z - \vec{e}_r = \frac{Lv_p}{GMm} \vec{e}_r - \vec{e}_r = \left(\frac{Lv_p}{GMm} - 1 \right) \vec{e}_r$$

Nếu quỹ đạo là tròn thì biểu thức trong ngoặc bằng 0, nhưng do quỹ đạo elip (gần tròn) mà v_p (vận tốc tại điểm cận nhật) là lớn nhất so với các điểm khác trên quỹ đạo nên nó lớn hơn vận tốc trung bình, nên biểu thức trong ngoặc là dương, tức $\vec{Z}$ cùng phương cùng chiều với $\vec{e}_r$ (xem hình vẽ), tức là hướng từ S đến P, đ.p.c.m. **0,50 điểm**

b) Như đã chứng minh $\vec{Z}$ là vector không đổi trong mặt phẳng quỹ đạo hướng từ S đến P, ta có thể viết:

$$\vec{Z} = \frac{1}{\alpha} [\vec{v} \times \vec{L}] - \vec{e}_r = \frac{1}{GMm} (r\dot{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \times L\vec{e}_z - \vec{e}_r = \frac{L}{GMm} (-r\dot{\vec{e}}_\theta + r\dot{\theta}\vec{e}_r) - \vec{e}_r$$

Ở trên ta đã chứng minh góc giữa hai vector $\vec{r}$ và $\vec{Z}$ chính là θ , nên ta có

$$\vec{r} \cdot \vec{Z} = |\vec{Z}| r \cos \theta$$

Lưu ý rằng $\vec{r} \cdot \vec{e}_r = r$ và $\vec{r} \cdot \vec{e}_\theta = 0$, tính trực tiếp từ biểu thức của $\vec{Z}$ ta được

$$\vec{r} \cdot \vec{Z} = \frac{L}{GMm} r\dot{\theta} - r = \frac{L^2}{GMm^2} - r$$

Từ hai biểu thức trên của tích $\vec{r} \cdot \vec{Z}$, ta có $|\vec{Z}| r \cos \theta = \frac{L^2}{GMm^2} - r$

Đặt $e = |\vec{Z}|$ và $p = \frac{L^2}{GMm^2}$ vào biểu thức trên, dễ dàng suy ra $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ **0,75 điểm**

Tại điểm cận nhật: $\theta = 0$ và $r = r_p$: $r_p = \frac{p}{1 + e}$

Tại điểm viễn nhật: $\theta = 180^\circ$ và $r = r_A$: $r_A = \frac{p}{1 - e}$

Từ hai phương trình trên suy ra $e = \frac{r_A - r_p}{r_A + r_p}$ và $p = \frac{2r_A r_p}{r_A + r_p}$ **0,25 điểm**

2. (2,5 điểm) a) U_p đúng là một nhiễu loạn nếu $|U_p| \ll |U|$ hay $\frac{GM}{c^2} \cdot \frac{L^2}{r^3} \ll \frac{GMm}{r^2}$ (*)

Vì L có cỡ độ lớn như là mrv , thay vào bất đẳng thức (*) suy ra $\frac{v}{c} \ll 1$. Điều kiện này rõ ràng là thỏa mãn đối với các hành tinh trong hệ Mặt Trời, do đó, phép gần đúng xem U_p là một nhiễu loạn nhỏ là một phép gần đúng tốt. **0,50 điểm**

b) Khi kể tới thế nhiễu loạn U_p , lực tác dụng lên hành tinh là

$$\vec{F} = -\frac{d}{dr} (U(r) + U_p(r)) \vec{e}_r = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r - \frac{\varepsilon}{r^4} \vec{e}_r = F_N - \frac{\varepsilon}{r^4} \vec{e}_r$$

với $\varepsilon = -\frac{3GM}{c^2} \frac{L^2}{m}$. Đây cũng là lực xuyên tâm nên momen động lượng $\vec{L}$ trong trường hợp này

cũng bảo toàn. Vector $\vec{Z}$ bây giờ vẫn được định nghĩa như trong 1.. Lấy đạo hàm của $\vec{Z}$ theo thời gian ta được

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \frac{1}{\alpha m} \vec{F} \times \vec{L} - \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \left(\frac{1}{\alpha m} \vec{F}_N \times \vec{L} - \dot{\theta} \vec{e}_\theta \right) + \frac{1}{\alpha m} \left(-\frac{\varepsilon}{r^4} \vec{e}_r \right) \times \vec{L}$$

Theo chứng minh ở 1., biểu thức trong ngoặc thứ nhất bằng 0. Khi đó, với chú ý rằng

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_z = -\vec{e}_\theta \text{ ta có } \frac{d\vec{Z}}{dt} = \frac{1}{GMm^2} \left(-\frac{\varepsilon}{r^4} \vec{e}_r \right) \times L \vec{e}_z = \frac{\varepsilon}{GMm^2} \frac{L}{r^4} \vec{e}_\theta$$

Thay $L = mrv = mr^2\dot{\theta}$ vào biểu thức trên ta được: $\frac{d\vec{Z}}{dt} = \frac{\varepsilon}{GMm^2} \frac{\dot{\theta}}{r^2} \vec{e}_\theta$ **0,50 điểm**

Do nhiễu loạn là rất nhỏ ta có thể gần đúng dùng phương trình tọa độ cực của quỹ đạo, khi đó

$$\text{phương trình trên trở thành } \frac{d\vec{Z}}{dt} = \frac{\varepsilon}{GMm^2} \frac{(1+e \cos \theta)^2}{p^2} \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

Trở về hệ tọa độ Descartes, ta có $\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y$, khi đó

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \frac{\varepsilon}{GMm^2} \frac{(1+e \cos \theta)^2}{p^2} (-\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y) \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{Lấy tích phân theo một vòng quỹ đạo ta được } \Delta \vec{Z} = \int_0^{2\pi} \frac{d\vec{Z}}{dt} dt = -\frac{2\pi \varepsilon e}{GMmp^2} \vec{e}_y$$

$$(\text{vì } \int_0^{2\pi} (1+e \cos \theta)^2 \cos \theta d\theta = 2e\pi \text{ và } \int_0^{2\pi} (1+e \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta = 0).$$

Như vậy độ biến thiên $\Delta \vec{Z}$ của $\vec{Z}$ vuông góc với $\vec{Z}$ và có độ lớn rất nhỏ so với Z , điều này có nghĩa là nhiễu loạn làm biến dạng quỹ đạo tương ứng với sự quay chậm của bán trục lớn của quỹ đạo elip trong mặt phẳng của nó. **0,50 điểm**

c) Góc $\Delta\varphi$ mà quỹ đạo quay trong thời gian một chu kì là $\Delta\varphi \approx \tan(\Delta\varphi) = \frac{|\Delta \vec{Z}|}{|\vec{Z}|}$. Vì môđun của

$\vec{Z}$ chính là tâm sai e , nên ta có

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi \varepsilon}{GMmp^2} = \frac{2\pi}{GMmp^2} \cdot \frac{3GM}{c^2} \cdot \frac{L^2}{m} = \frac{6\pi L^2}{m^2 c^2 p^2}$$

Cần nhớ rằng theo định nghĩa $p = \frac{L^2}{GMm^2}$, suy ra $\frac{L^2}{m^2} = pGM$. Thay vào biểu thức trên ta được

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi L^2}{m^2 c^2 p^2} = \frac{6\pi GM}{c^2 p}$$

Mặt khác, ở 1. ta đã tìm được $p = \frac{2r_A r_p}{r_A + r_p}$, thay vào biểu thức trên, cuối cùng ta có

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi GM}{c^2} \cdot \frac{r_A + r_p}{r_A r_p} = 5,03 \cdot 10^{-7} \text{ (rad)} \text{ } **0,50 điểm**$$

d) Trong một thế kỉ trục lớn của quỹ đạo elip đã quay được một góc là $\delta\Omega = 100 \cdot \frac{365,25}{T} \cdot \Delta\varphi$

Thay các số liệu vào ta tìm được $\delta\Omega = 2 \cdot 10^{-4} \text{ (rad)} = 43,1''$ nằm trong vùng sai số của kết quả thực nghiệm, nghĩa là thuyết tương đối đã giải thích tốt hiện tượng này. **0,50 điểm**

CÂU III (3,5 điểm)**1. (1,50 điểm)**

a. Thời gian đi của B là t_1 , thời gian về là $2t_1$ nên tổng thời gian đi và về là $3t_1$. Do đó, anh ta gửi $3t_1$ xung trong toàn bộ chuyến đi. **0,25 điểm**

b. Trong hành trình bay đi, các xung mà B nhận được có tần số

$$f_1 = f \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}} = f \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

với $\beta_1 = \frac{v}{c}$ và $f = 1 \text{ Hz}$. Số xung mà B đã nhận được trong quá trình bay đi là

$$f_1 t_1 = t_1 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad (1) \dots\dots\dots \mathbf{0,50 \text{ điểm}}$$

Trong hành trình bay về, các xung mà B nhận được có tần số

$$f_2 = f \sqrt{\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}} = f \sqrt{\frac{2c+v}{2c-v}}$$

với $\beta_2 = \frac{v}{2c}$ và $f = 1 \text{ Hz}$. Số xung mà B đã nhận được trong quá trình bay về là

$$f_2 t_2 = 2t_1 \sqrt{\frac{2c+v}{2c-v}} \quad (2) \dots\dots\dots \mathbf{0,50 \text{ điểm}}$$

c. Số xung mà B nhận được trong cả quá trình bay là

$$f_1 t_1 + f_2 t_2 = t_1 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} + 2t_1 \sqrt{\frac{2c+v}{2c-v}}$$

$$\text{Tỉ số cần tìm: } n = \frac{f_1 t_1 + f_2 t_2}{3t_1} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2c+v}{2c-v}} \dots\dots\dots \mathbf{0,25 \text{ điểm}}$$

2. (2,00 điểm)

a. Gọi $\vec{k} = \frac{\vec{v}}{v}$ là véc tơ đơn vị theo phương chuyển động của hạt (véc tơ đơn vị của $\vec{v}$). Phân tích

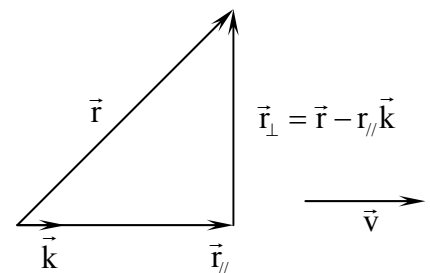
bán kính véc tơ $\vec{r}$ theo hai phương: phương $\perp$ với $\vec{v}$ và phương $\parallel$ với $\vec{v}$: $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$

Ta có $r_\parallel = \vec{r} \cdot \vec{k} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v}$ và $\vec{r}_\perp = \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v} \cdot \frac{\vec{v}}{v}$; đặt $\beta = \frac{v}{c}$

Áp dụng phép biến đổi Lorentz cho thành phần song song, ta có

$$r_\parallel = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{\vec{r}' \cdot \frac{\vec{v}}{v} + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1)$$

$$t = \frac{t' + \frac{1}{c^2} (\vec{r}' \cdot \vec{v})}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2)$$



$$\text{Thành phần vuông góc không thay đổi (bất biến), tức } \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \vec{r}' - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (3): } \vec{r} = \vec{r}' - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v} \cdot \frac{\vec{v}}{v} + \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} + \frac{vt'}{\sqrt{1-\frac{c^2}{v^2}}} \quad (4) \dots\dots\dots \mathbf{1,00 \text{ điểm}}$$

b. Lấy vi phân hai vế các công thức (2) và (4)

$$d\vec{r} = d\vec{r}' + \frac{1}{v^2} \vec{v}(\vec{v} \cdot d\vec{r}') + \frac{\frac{1}{v^2} \vec{v}(\vec{v} \cdot d\vec{r}') + \vec{v} dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot d\vec{r}')}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\text{Từ đây suy ra: } \vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{v} + \vec{u}' \sqrt{1-\beta^2} + \frac{1}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{u}') \vec{v} (1 - \sqrt{1-\beta^2})}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}} \quad (5) \dots\dots\dots 0,50 \text{ điểm}$$

Bình phương hai vế và biến đổi:

$$\begin{aligned} \vec{u}^2 \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}\right)^2 &= \vec{v}^2 + \vec{u}'^2 (1-\beta^2) + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u}')^2}{v^2} (2 - 2\sqrt{1-\beta^2} - \beta^2) \\ &\quad + 2(\vec{v} \cdot \vec{u}')^2 \sqrt{1-\beta^2} + 2(\vec{v} \cdot \vec{u}') (1 - \sqrt{1-\beta^2}) + 2 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u}')^2}{v^2} (\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2) \\ \vec{u}^2 \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}\right)^2 &= \vec{v}^2 + 2(\vec{v} \cdot \vec{u}') + \vec{u}'^2 + \vec{u}'^2 (-\beta^2) + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u}')^2}{v^2} \beta^2 = (\vec{v}^2 + \vec{u}'^2)^2 - \vec{u}'^2 \left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v^2 \vec{u}'^2 \cos^2(\vec{v}, \vec{u}')}{v^2} \frac{v^2}{c^2} \\ &= (\vec{v}^2 + \vec{u}'^2)^2 - \frac{v^2 \vec{u}'^2}{c^2} (1 - \cos^2(\vec{v}, \vec{u}')) = (\vec{v}^2 + \vec{u}'^2)^2 - \frac{(\vec{u}' \times \vec{v})^2}{c^2} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$u = \frac{\sqrt{(\vec{v}^2 + \vec{u}'^2)^2 - \frac{(\vec{u}' \times \vec{v})^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}\right)} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$$

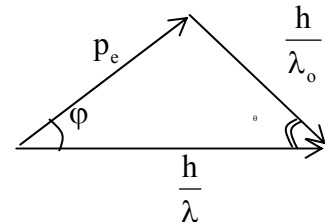
CÂU IV (2,5 điểm)

Gọi f_0 (λ_0) và f (λ) lần lượt là tần số (bước sóng) của hai photon A và B. Ký hiệu E_e và p_e lần lượt là năng lượng toàn phần và động lượng của electron trước va chạm, và $m_e c^2$ là năng lượng nghỉ của electron. Theo định luật bảo toàn năng lượng và động lượng, ta có:

$$hf_0 + E_e = m_e c^2 + hf \quad (1)$$

$$p_e \sin \varphi - \frac{h}{\lambda_0} \sin \theta = 0 \quad (2)$$

$$p_e \cos \varphi + \frac{h}{\lambda_0} \cos \theta = \frac{h}{\lambda} \quad (3)$$



Ta sẽ khử φ từ các phương trình trên và thay $\theta = 60^\circ$. Từ (2) và (3), ta có:

$$p_e^2 \sin^2 \varphi = \frac{3h^2}{4\lambda_0^2} \text{ và } p_e^2 \cos^2 \varphi = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{2\lambda_0}\right)^2$$

$$\text{Cộng hai phương trình trên với nhau ta được: } p_e^2 = h^2 \left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0 \lambda} \right) \quad (4) \dots\dots\dots 1,0 \text{ điểm}$$

Mặt khác $p_e^2 = \frac{E_e^2 - m_e^2 c^4}{c^2}$ **0,25 điểm**

Từ (1), ta có: $m_e c^2 = E_e + h(f_0 - f)$

Thay vào biểu thức trên của p_e^2 , ta được

$$p_e^2 = \frac{E_e^2 - [E_e + h(f_0 - f)]^2}{c^2} = \frac{-2hE_e(f_0 - f) - h^2(f_0 - f)^2}{c^2}$$

$$= -2hm_e(f_0 - f) + 2\frac{h^2}{c^2}(f_0 - f)^2 - \frac{h^2}{c^2}(f_0 - f)^2 = h^2\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)^2 - 2m_e hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) \quad (5)$$

So sánh (4) và (5) ta được: $p_e^2 = h^2\left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0\lambda}\right) = h^2\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)^2 - 2m_e hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)$

Sau khi rút gọn, ta có: $\frac{h^2}{\lambda_0\lambda} = 2m_e hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$

Suy ra $\lambda_0 - \lambda = \frac{h}{2m_e c} \approx 0,1214 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

Thay $\lambda_0 = 0,116 \text{ nm}$ vào, ta tìm được $\lambda = 0,1148 \text{ nm}$ **0,75 điểm**

Theo công thức tính bước sóng de Broglie, ta có: $p_e = \frac{h}{\lambda_e}$

Dùng (4), ta được: $p_e^2 = \frac{h^2}{\lambda_e^2} = h^2\left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0\lambda}\right)$

Hay $\frac{1}{\lambda_e^2} = \left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0\lambda}\right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda\lambda_0}}$

Thay các số liệu đã biết vào ta được: $\lambda_e = 0,1154 \text{ nm} \approx 0,115 \text{ nm}$ **0,5 điểm**

CÂU V (5,5 điểm)

1. (2,5 điểm) Trình bày cơ sở lý thuyết và xây dựng các công thức cần thiết xác định α và β .

Muốn xác định được các hệ số α và β liên quan đến quá trình chuyển động của tấm nhựa trên mặt bàn ta cần bố trí hệ thí nghiệm sao cho tạo được vận tốc cho tấm và cần phải xác định được khối lượng M của tấm nhựa.

Có thể tạo vận tốc ban đầu cho tấm nhựa bằng việc sử dụng va chạm của vật m và tấm.

Tạo vận tốc vật m trước khi va chạm vào M bằng việc cho vật m chuyển động dưới tác dụng của trọng lực, thế năng chuyển hoá thành động năng.

Độ cao vật m ban đầu do với vị trí trước va chạm là h thì vận tốc vật m thu được là

$m \frac{v_1^2}{2} = mgh \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$ (1) **0,25 điểm**

Vật m khi va chạm đàn hồi với M sẽ tạo vận tốc v_2 cho M xác định từ hệ phương trình

$mv_1 = Mv_2 + mv_1' \quad (*)$

$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_1'^2 \quad (**)$ suy ra $v_2 = \frac{2m}{M+m}v_1$ (2) **0,25 điểm**

Khi tấm với vận tốc ban đầu v_2 chuyển động dưới lực cản của ma sát trượt và lực cản môi trường, phương trình chuyển động cho tấm trên mặt bàn:

$$Ma = -\alpha Mg - \beta v \Rightarrow M \frac{dv}{dt} = -\alpha Mg - \beta v$$

Đổi biến $u = \alpha Mg + \beta v$, giải phương trình vi phân ta có $\int_{u_0}^u \frac{du}{u} = \int_0^t -\frac{\beta}{M} dt$ với $u_0 = \alpha Mg + \beta v_2$

ta được $v = \left(\frac{\alpha Mg}{\beta} + v_2 \right) e^{-\frac{\beta}{M}t} - \frac{\alpha Mg}{\beta}$ (3)..... **0,75 điểm**

Thời gian mà tấm chuyển động (đến khi $v = 0$) là $t_1 = \frac{M}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta v_2}{\alpha Mg} \right)$ (4)..... **0,25 điểm**

Quãng đường mà tấm M trượt được là $s = \int_0^{t_1} v dt = \int_0^{t_1} \left[\left(\frac{\alpha Mg}{\beta} + v_2 \right) e^{-\frac{\beta}{M}t} - \frac{\alpha Mg}{\beta} \right] dt$

$$s = -\frac{M}{\beta} \left(\frac{\alpha Mg}{\beta} + v_2 \right) e^{-\frac{\beta}{M}t_1} - \frac{\alpha Mg}{\beta} t_1 + \frac{M}{\beta} \left(\frac{\alpha Mg}{\beta} + v_2 \right) = \frac{M v_2}{\beta} \left[1 - \frac{\alpha Mg}{\beta v_2} \ln \left(1 + \frac{\beta v_2}{\alpha Mg} \right) \right]$$
 (5)

Khai triển hàm $\ln \left(1 + \frac{\beta v_2}{\alpha Mg} \right)$ thành đa thức theo công thức $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Ta có $s = \frac{v_2^2}{2\alpha g} - \frac{\beta v_2^3}{3\alpha^2 M g^2}$ (6)..... **1,00 điểm**

Như vậy bằng việc đo khoảng cách dịch chuyển của tấm theo chiều cao vật m (hay theo vận tốc ban đầu v_2 của M) ta có thể xác định được α và β .

2. (3,0 điểm)

(1,50 điểm) Trình tự thí nghiệm:

B1: Xác định khối lượng vật M (sử dụng thước làm cân đòn và vật m đã biết để tính M)

..... **0,50 điểm**

B2: Bố trí thí nghiệm (như hình vẽ):

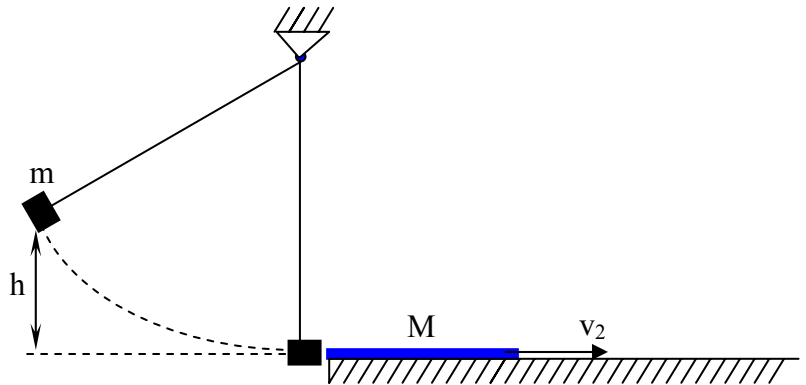
- Vật M để hơi nhô khỏi mép bàn một chút

- Chiều dài dây buộc vật m phải phù hợp

- Kéo lệch vật m lên độ cao h và

thả để vật m đến va chạm vào M, đo quãng đường dịch chuyển của vật M. **0,75 điểm**

- Ghi số liệu vào bảng..... **0,25 điểm**



Lần	1	2	3				
h							
s							

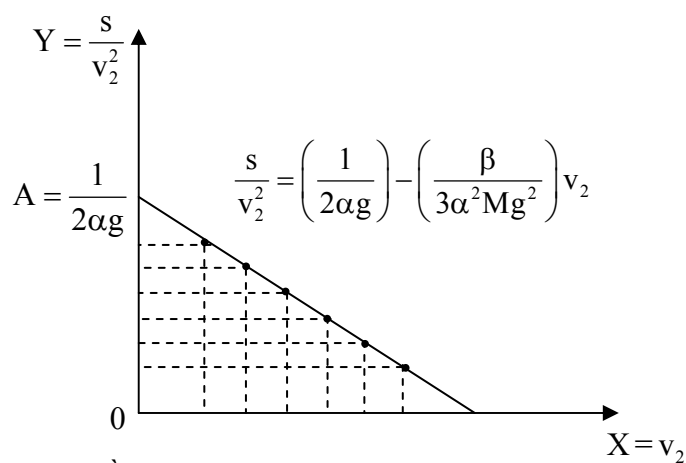
(1,50 điểm) Xử lý số liệu

Tính các đại lượng liên quan theo công thức: $v_1 = \sqrt{2gh}$ và $v_2 = \frac{2m}{M+m} v_1$.

Lần	1	2	3							
h										
v_1										
v_2										
s/v_2^2										

Dựng đồ thị biểu diễn mối quan hệ $Y = \frac{s}{v_2^2}$ theo $X = v_2$. Đồ thị có dạng:

$$Y = \frac{s}{v_2^2} = \frac{1}{2\alpha g} - \frac{\beta v_2}{3\alpha^2 M g^2} = A - BX \dots\dots\dots 1,00 \text{ điểm}$$



Xác định hệ số A, B từ đồ thị, từ đó tính được α và β . $\dots\dots\dots 0,50 \text{ điểm}$

-----HẾT-----