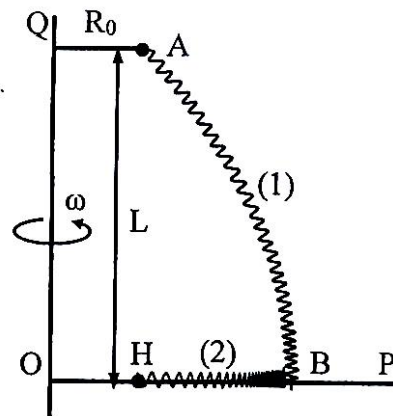


KỶ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC NĂM 2022

Ngày thi thứ hai: 27/4/2022

Câu 1. Trong bài này, các lò xo làm bằng sợi dây đồng chất, có tiết diện không đổi và rất nhỏ. Lò xo có các đặc điểm giả định sau: chiều dài khi không biến dạng là không đáng kể; độ giãn của lò xo có thể rất lớn; độ biến dạng hữu hạn của lò xo tuân theo luật Hooke.

Một giá đỡ cứng có cấu tạo gồm thanh QA và thanh OP vuông góc với thanh OQ. Các thanh cùng nằm trên một mặt phẳng. H là một điểm cố định trên thanh OP. Khoảng cách $OH = AQ = R_0$, thanh QA cách OP một khoảng L. Giá đỡ có thể quay quanh trục quay trùng với thanh OQ.



Hình 1

Lò xo (1) và (2) giống hệt nhau và có đặc điểm ở trên được mắc vào giá đỡ. Lò xo có cùng khối lượng m và độ cứng k. Một đầu của lò xo (1) được gắn chặt vào điểm A và một đầu lò xo (2) được gắn chặt vào điểm H. Đầu còn lại của lò xo

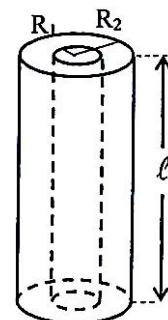
(1) gắn với một vòng mỏng nhẹ, vòng này có thể trượt tự do trên thanh OP. Lò xo (2) có thể giãn tự do dọc theo thanh OP. Cơ hệ gồm giá đỡ cứng và các lò xo được bố trí trong điều kiện môi trường mất trọng lượng (ví dụ cơ hệ được đặt trên trạm vũ trụ quốc tế)

1. Xét cơ hệ ở trạng thái ổn định, cơ hệ ở trạng thái quay đều với vận tốc góc ω . Khi đó hai lò xo có hình dạng không đổi, hai đầu tự do của hai lò xo có cùng vị trí xác định B trên thanh OP, tại đó các lò xo vuông góc với nhau (hình 1). Hãy:

- Lập phương trình mô tả hình dạng lò xo (1).
- Xác định chiều dài HB của lò xo (2).
- Tìm vận tốc góc giới hạn ω_0 .

2. Từ trạng thái ổn định ở ý 1, tăng rất chậm giá trị ω tới khi vượt quá giá trị ω_0 . Hãy mô tả sự biến đổi hình dạng, trạng thái của các lò xo và giải thích.

Câu 2. Một bình hình trụ kín có chiều dài ℓ gồm hai mặt trụ đồng có bán kính trong và bán kính ngoài lần lượt là R_1 và R_2 ($R_1 < R_2$, $R_2 < \ell$) như hình 2. Hai mặt đầu của bình làm bằng vật liệu cách nhiệt. Nhiệt độ bề mặt của mặt trụ bên trong và ngoài lần lượt là T_1 và T_2 ($T_1 > T_2$). Bỏ qua quá trình bức xạ nhiệt và đối lưu. Cho hằng số khí là R. Quá trình truyền nhiệt qua một môi trường dọc theo trục Ox tuân theo định luật Fourier



Hình 2

$$dQ = -k \frac{dT}{dx} dS dt, \text{ trong đó } dQ \text{ là nhiệt lượng truyền trong thời gian } dt$$

qua diện tích dS nằm vuông góc với trục Ox, mà dọc theo nó nhiệt độ T thay đổi, k là hệ số truyền nhiệt của môi trường. Dấu trừ cho thấy nhiệt năng được truyền từ nơi có nhiệt độ cao về nơi có nhiệt độ thấp hơn.

1. Không gian giữa hai mặt trụ được lấy đầy bởi n_0 mol khí lý tưởng đơn nguyên tử. Giữ nhiệt độ T_1 tại mặt trụ trong và T_2 tại mặt trụ ngoài không đổi. Do sự chênh lệch nhiệt độ giữa hai mặt trụ nên xảy ra sự truyền nhiệt qua lớp khí từ mặt trụ trong ra mặt trụ ngoài. Với môi trường truyền nhiệt là chất khí, k phụ thuộc vào nhiệt độ khí theo quy luật $k = b\sqrt{T}$, với b là một hằng số. Ở trạng thái dừng, hãy:

- Xác định tổng trở nhiệt R_0 của lớp khí giữa hai mặt trụ theo R_1 , R_2 , T_1 , T_2 , b, ℓ . Biết

$$R_0 = \frac{T_1 - T_2}{dQ/dt}$$

- Xác định nhiệt độ của chất khí tại những điểm cách trục của hai mặt trụ một đoạn là r ($R_1 \leq r \leq R_2$) theo R_1 , R_2 , T_1 , T_2 , r.

- Xác định áp suất của khí trong bình. Áp dụng bằng số với $n_0 = 0,5 \text{ mol}$, $T_1 = 400 \text{ K}$, $T_2 = 300 \text{ K}$, $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 20 \text{ cm}$, $\ell = 50 \text{ cm}$, $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Cho biết:
$$\int_{0,1}^{0,2} \frac{y dy}{\left[800 - 4045,1 \times \ln \frac{y}{0,1}\right]^{2/3}} = 4,44 \times 10^{-5}$$

2. Không gian giữa hai mặt trụ được lấp đầy bởi vật liệu có hệ số truyền nhiệt k là không đổi. Hai mặt trụ có nhiệt dung lần lượt là C_1, C_2 và có nhiệt độ thay đổi theo thời gian. Biết rằng tại thời điểm ban đầu nhiệt độ mặt trụ trong là T_{10} và mặt trụ ngoài là T_{20} . Bỏ qua sự truyền nhiệt từ bình ra môi trường xung quanh. Hãy xác định nhiệt độ tương ứng của hai mặt trụ $T_1(t)$ và $T_2(t)$ theo $T_{01}, T_{02}, C_1, C_2, k, \ell, R_1, R_2$ và theo thời gian t .

Câu 3.

- Hàm phân bố mật độ xác suất theo năng lượng u tuân theo phân bố Boltzmann có dạng:

$f(u) = A \cdot e^{-\frac{u}{kT}}$, trong đó A là hệ số chuẩn hóa, k là hằng số Boltzmann.

- Hàm toán học: $\coth a = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}}$. Khi $a \ll 1$ thì

$$\coth a = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} = \frac{1}{a} + \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} \dots \approx \frac{1}{a} + \frac{a}{3}.$$

$$\tanh a = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}. \text{ Khi } a \ll 1 \text{ thì } \tanh a = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \simeq a$$

1. Mômen từ của một electron bằng $\vec{\mu} = -\frac{e}{m} \vec{S}$, trong đó $-e, m, \vec{S}$ tương ứng là điện tích, khối

lượng và mô men động lượng spin của electron. $\vec{S}$ của electron bị lượng tử hóa, hình chiếu của nó lên phương từ trường chỉ có thể nhận một trong hai giá trị $\pm \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$, với h là hằng số Planck.

Xét hệ nguyên tử gồm các nguyên tử, mật độ nguyên tử trên một đơn vị thể tích là n , mỗi nguyên tử chỉ chứa một electron và giả thiết mô men từ của nguyên tử là do mômen từ của electron gây ra.

Đặt hệ nguyên tử trong một từ trường đều có cảm ứng từ $\vec{B}$, các mômen từ của các nguyên tử chỉ định hướng theo phương song song với từ trường (cùng chiều và ngược chiều $\vec{B}$). Bỏ qua sự tương tác giữa các nguyên tử và cho biết hàm phân bố mật độ xác suất theo năng lượng u tuân theo phân bố Boltzmann.

Để đặc trưng cho mức độ từ hóa của hệ nguyên tử trong từ trường ngoài $\vec{B}$ người ta dùng đại lượng độ cảm từ χ . Độ cảm từ χ được xác định qua biểu thức: $\vec{I} = \chi \cdot \vec{H}$ trong đó $\vec{I}$ là vectơ từ

hóa ($\vec{I}$ cũng là mômen từ của một đơn vị thể tích), $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$ là vectơ cường độ từ trường, μ_0

là hằng số từ (độ từ thẩm của chân không).

Hãy tính gần đúng giá trị χ của hệ nguyên tử trên theo n, m, e, T và các hằng số đã cho.

Cho biết: - Ở điều kiện khảo sát t thì $\chi \ll 1$ và $kT \gg \frac{eB}{2m} \frac{h}{2\pi}$

- Năng lượng tương tác giữa mômen từ $\vec{\mu}$ và từ trường $\vec{B}$ là $u = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

2. Xét chất từ môi là chất thuận từ, khi chưa đặt trong từ trường ngoài, mỗi nguyên tử của từ môi có một mômen từ $\vec{m}_0 \neq 0$, các mômen từ sắp xếp hỗn loạn theo mọi phương cho nên vectơ từ hóa $\vec{I}$ bằng 0 và từ môi khi đó không có từ tính (không bị từ hóa).

Đặt từ môi vào trong từ trường ngoài $\vec{B}$, từ trường tác dụng lên mômen từ nguyên tử $\vec{B}_t$ bằng tổng của từ trường ngoài $\vec{B}$ và từ trường phụ $\vec{B}'$. Giả thiết từ trường phụ $\vec{B}'$ cùng phương c hiệu với từ trường ngoài $\vec{B}$ và chỉ do các nguyên tử lân cận tác dụng lên nguyên tử ta xét và tỉ lệ với

véc tơ từ hóa: $\vec{B}' = b\vec{I}$ với b là một hằng số dương. Năng lượng tương tác giữa mômen từ của mỗi nguyên tử và từ trường là $u = -\vec{m}_0 \vec{B}_t$. Cho biết số mômen từ trong một đơn vị thể tích và nhiệt độ của khối từ môi tương ứng là N và T . Giả thiết hệ các mômen từ $\vec{m}_0$ tuân theo phân bố Boltzmann.

a) Gọi θ là góc hợp bởi mômen từ $\vec{m}_0$ và $\vec{B}_t$ ($0 \leq \theta \leq \pi$). Từ hàm phân bố mật độ xác suất theo năng lượng u hãy tìm hàm phân bố mật độ xác suất theo góc θ và xác định hệ số chuẩn hóa A .

b) Khi hệ số từ môi ổn định trong từ trường ngoài, véc tơ từ hóa $\vec{I}$ tại điểm xét cùng phương chiều với $\vec{B}_t$. Véc tơ từ hóa $\vec{I}$ tại điểm xét là sự hợp bởi các mômen từ của các nguyên tử lân cận mà các mômen từ nguyên tử này tuân theo phân bố Boltzmann. Tìm biểu thức độ lớn véc tơ từ hóa $\vec{I}$ khi từ môi đặt trong môi từ trường ngoài $\vec{B}$ theo N, B, M', m_0, k, T .

c) Xác định biểu thức độ lớn véc tơ hóa $\vec{I}$ tính được ở ý b) trong các trường hợp sau:

c.1) Đóng góp của từ trường phụ có thể bỏ qua ($b \simeq 0$).

- Từ trường bên ngoài $\vec{B}$ rất nhỏ, từ môi ở nhiệt độ môi trường.

- Từ trường bên ngoài $\vec{B}$ rất lớn và nhiệt độ T rất nhỏ.

c.2) Đóng góp của từ trường phụ là rất lớn ($b \gg 1$), $\vec{B}_t \simeq \vec{B}'$, từ môi dạng sắt từ.

Câu 4:

Ta sẽ khảo sát tính chất lượng tử chuyển động phi tương đối tính của một vi hạt có năng lượng E trên mặt phẳng $z=0$ của hệ tọa độ trụ (r, θ, z) (ứng với hệ vector đơn vị $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) trong trường thế xuyên tâm $U(r) = -\int f(r)dr$ của lực $\vec{F}(r) = f(r)\vec{e}_r$. Giả sử quỹ đạo của vi hạt là một đường conic có khoảng cách ngắn nhất và xa nhất đến tâm trường lực tương ứng là r_1 và r_2 . Nếu trường thế xuyên tâm là trường Coulomb thì đây chính là mô hình chuyển động của electron (điện tích e) trong nguyên tử Hydro.

Theo lý thuyết Bohr, các electron trong nguyên tử Hydro chuyển động trên các quỹ đạo dừng là các quỹ đạo tròn. Theo quy tắc lượng tử hóa Bohr cho quỹ đạo tròn: $\oint p ds = n.h$ với p , ds tương ứng là động lượng và vi phân độ dài quỹ đạo của vi hạt, tích phân lấy trên toàn độ dài quỹ đạo của vi hạt. Ở quỹ đạo dừng thứ n có bán kính r_n , vi hạt có khối lượng m sẽ chuyển động với tốc độ không đổi v_n , ta có:

$$\oint p ds = (mv_n)2\pi r_n = 2\pi L_n = 2\pi \left(n \frac{h}{2\pi} \right) = nh \quad (1)$$

Với $n = 1, 2, \dots$; $L_n = n \frac{h}{2\pi}$ là mô men động lượng quỹ đạo của vi hạt và bị lượng tử hóa, h là hằng số Planck.

Chúng ta sẽ mở rộng lý thuyết này cho chuyển động của electron trong nguyên tử Hydro trên quỹ đạo dừng là các elip bằng cách sử dụng định luật bảo toàn năng lượng (cổ điển) và quy tắc lượng tử hóa Bohr – Sommerfeld là mở rộng của quy tắc Bohr:

$$\oint p_i ds_i = \left(n_i + \frac{1}{2} \right) h \quad (n_i = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Với p_i , ds_i tương ứng là thành phần động lượng, vi phân độ dài hình chiếu quỹ đạo lên tọa độ i , còn n_i là các số lượng tử tương ứng của tọa độ này. Chúng ta thấy vế phải của quy tắc Bohr – Sommerfeld (2) khác với vế phải của quy tắc Bohr (1) một lượng $\frac{1}{2}h$ do có xét đến sự thăng giáng lượng tử của chân không.

Phần A: Chúng ta xem xét chuyển động của vi hạt trong trường thế xuyên tâm tổng quát $U(r)$, vi hạt chỉ di chuyển trên mặt phẳng $z = 0$.

1. Vi hạt ở tọa độ $(r, \theta, z) = (r, \theta, 0)$ và di chuyển một đoạn vi phân độ dài $d\vec{s} = ds_r \cdot \vec{e}_r + ds_\theta \cdot \vec{e}_\theta$ với $ds_\theta = r d\theta$ và $ds_r = dr$. Hãy chứng minh hình chiếu mô men động lượng của vi hạt trên trục z là $L_z = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = mrv_\theta = rp_\theta$ được bảo toàn.

2. Từ quy tắc lượng tử hóa cho tọa độ θ và tọa độ r , áp dụng quy tắc (2) hãy:

a) Tìm các giá trị có thể có của L_z .

b) Tìm biểu thức của p_r theo năng lượng E , thế năng $U(r)$ và hình chiếu mô men động lượng L_z .

c) Sử dụng quy tắc Bohr – Sommerfeld cho tọa độ: $\oint p_r ds_r = \left(n_r + \frac{1}{2}\right)h$, $n_r = 0, 1, 2, \dots$

dẫn ra tích phân có cận là r_1 và r_2 với hàm dưới dấu tích phân chứa các đại lượng r , m , E , $U(r)$, L_z .

3. Bằng việc biến đổi biểu thức $\frac{d\theta}{dr}$ và chuyển đổi sang mối quan hệ liên quan đến r , L_z và p_r , sau đó sử dụng các cận tích phân ứng với nửa đường cong kín (từ r_1 đến r_2) chứng minh rằng:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{L_z dr}{\pi r^2 \sqrt{2m(E - U(r)) - L_z^2 / r^2}} = 1$$

Phần B: Chúng ta xem xét chuyển động của electron trong trường xuyên tâm $U(r) = -\frac{ke^2}{r}$ với k là một hằng số điện. Biết rằng quỹ đạo của electron nằm trên mặt phẳng $z = 0$ là đường conic có phương trình $r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos \theta}$.

1. Viết biểu thức của P , tâm sai ε , r_1 và r_2 theo E , $U(r)$, L_z , m , k và e .

2. Chứng minh rằng nếu electron có năng lượng $E < 0$ thì quỹ đạo electron là các elip.

3. Đặt $n = n_r + n_\theta + 1$ gọi là số lượng tử chính, chứng minh rằng:

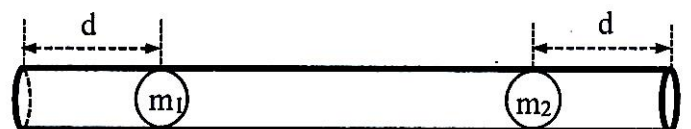
$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{4m(E - U(r))dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - L_z^2 / r^2}} = nh \quad (n = 1, 2, \dots)$$

4. Tính các mức năng lượng E_n của electron theo số lượng tử chính n . Chứng minh rằng các kết quả thu được cho các chuyển động electron theo quỹ đạo elip trùng với lý thuyết Bohr cho các chuyển động của electron theo quỹ đạo tròn $\left(E_n = -\frac{2\pi^2 mk^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}\right)$.

5. Hãy biểu diễn E_n qua hằng số Rydberg tính được từ lý thuyết $R_\infty = \frac{2\pi^2 mk^2 e^4}{h^3 c}$ và tính toán bằng số với các giá trị: hằng số điện $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, hằng số Planck $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, điện tích nguyên tố $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, vận tốc ánh sáng trong chân không $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Biểu diễn E_n qua đơn vị eV.

Tính sai số tỉ đối $\eta = \frac{R_\infty - R}{R} \cdot 100\%$ ($R = 1,09678 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ là giá trị hằng số Rydberg đo được bằng thực nghiệm).

Câu 5. Hộp đen cơ học có cấu tạo như hình 5 gồm một vỏ nhỏ hình trụ cứng, đồng chất có khối lượng M , trong lòng ống có gắn chặt thêm hai vật nhỏ khối lượng m_1 và m_2 . Đường kính của ống nhỏ hơn nhiều so với chiều dài ống. Hai vật cách hai đầu ống cùng một khoảng cách d chưa biết. Hai đầu ống được bịt kín bằng vật liệu cứng, mỏng và rất nhẹ so với khối lượng ống và hai vật. Bạn không thể quan sát được hai vật m_1 , m_2 và đo được trực tiếp vị trí hai



Hình 5.

vật. Khối lượng M đã biết, khoảng cách d chưa biết, khối lượng m_1 và m_2 chưa biết nhưng $m_1 > m_2$. Trong bài thí nghiệm này ta cần xác định các khối lượng m_1 , m_2 và vị trí (giá trị d) của vật trong ống. Biết gia tốc trọng trường tại nơi làm thí nghiệm là g . Cho các dụng cụ sau:

- Hộp đen cơ học có các đặc điểm ở trên;
- Một giá treo trên có hai điểm để treo cố định;
- Hai sợi dây dài, mảnh, mềm, nhẹ, không giãn;
- Một thước đo chiều dài;
- Một đồng hồ bấm giây.

Yêu cầu:

1. Xây dựng công thức cần thiết để xác định khối lượng của các vật m_1 , m_2 và khoảng cách d .
2. Vẽ sơ đồ bố trí thí nghiệm, các bước tiến hành, bảng số liệu và cách xử lý số liệu để xác định được m_1 , m_2 và d .