

Bài giải

Câu 1.

1. Gọi $\vec{v}_1 = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$, $\vec{v}_2$ và $\vec{v}_3$ lần lượt là vận tốc của $(m_1 + m)$, m_2 và m_3 ngay sau va chạm lần thứ nhất.

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12} \\ \text{Ta có: } \vec{v}_3 &= \vec{v}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{13} \end{aligned} \quad (1)$$

Định luật bảo toàn động lượng:

$$\begin{aligned} -mv_0 &= (m + mm_1)v_x + m_2(v_x - \omega_1 \ell \sin \alpha) + m_3(v_x - \omega_2 \ell \cos \alpha) \\ 0 &= (m + m_1)v_y + m_2(v_y + \omega_1 \ell \cos \alpha) + m_3(v_y - \omega_2 \ell \sin \alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

Vì thanh cứng có khối lượng không đáng kể nên không có lực tác dụng lên hai chất điểm m_2, m_3 theo phương vuông góc với thanh.

Động lượng của m_2, m_3 theo phương vuông góc với thanh được bảo toàn:

$$\begin{aligned} -v_y \cos \alpha + v_x \sin \alpha - \omega_1 \ell &= 0 \\ v_y \sin \alpha + v_x \cos \alpha - \omega_2 \ell &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

1a) Từ các phương trình (1) – (3) suy ra

$$\begin{cases} -40 = 8v_x - 0,4\omega_1 + 1,05\omega_2 \\ 0 = 8v_y - 0,7\omega_1 - 0,6\omega_2 \\ 0 = -0,4\omega_1 + 0,5v_x + 0,87v_y \\ 0 = -0,4\omega_2 - 0,87v_x + 0,5v_y \end{cases} \quad (4)$$

Giải hệ phương trình (4) tìm được kết quả $\omega_1 = -8,33 \text{ rad/s}$; $\omega_2 = 17,31 \text{ rad/s}$

(5)

1b) Vận tốc độ góc của hai thanh bằng nhau $\omega_1 = \omega_2$ thay vào hệ phương trình (4) tính được $\tan \alpha = 1,2$ có hai trường hợp: $\alpha_1 = 50,2^\circ$; $v_x = -7,21 \text{ m/s}$; $v_y = -0,66 \text{ m/s}$, $v_1 = 7,24 \text{ m/s}$, $\alpha_2 = -129,9^\circ$; $v_x = -7,21 \text{ m/s}$; $v_y = -0,66 \text{ m/s}$, $v_1 = 7,24 \text{ m/s}$ (6)

2. Đặt v_t , ω là vận tốc khối tâm, vận tốc độ góc của thanh AB ngay sau va chạm với m_1 .

Định luật bảo toàn động lượng

$$\begin{aligned} -mv_0 &= m_1 v_x + m_2(v_x - \omega_1 \ell \sin \alpha) + m_3(v_x - \omega_2 \ell \cos \alpha) + mv_t \\ 0 &= m_1 v_y + m_2(v_y + \omega_1 \ell \cos \alpha) + m_3(v_y - \omega_2 \ell \sin \alpha) \end{aligned} \quad (8)$$

Định luật bảo toàn cơ năng

$$\begin{aligned} \frac{mv_0^2}{2} &= \frac{mv_t^2}{2} + \frac{I\omega_t^2}{2} + \frac{m_2}{2} [(v_x - \omega_1 \ell \sin \alpha)^2 + (v_y + \omega_1 \ell \cos \alpha)^2] + \\ &+ \frac{m_3}{2} [(v_x - \omega_2 \ell \cos \alpha)^2 + (v_y - \omega_2 \ell \sin \alpha)^2] + \frac{m_1}{2} (v_x^2 + v_y^2) \end{aligned} \quad (9)$$

Định luật bảo toàn momen động lượng (Chiếu các véc tơ mômen động lượng lên trục Oz)

$$\begin{aligned} 0 &= I\omega_t - m_1 v_x \frac{\ell}{2} - m_2(v_x - \omega_1 \ell \sin \alpha) \left[\frac{\ell}{2} + \ell \sin \alpha \right] - \\ &- m_3(v_x - \omega_2 \ell \cos \alpha) \left[\frac{\ell}{2} + \ell \cos \alpha \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Lập được hệ phương trình từ (3) (8)(10)

$$\begin{cases} 40 + 2v_t + 6v_x - 0,4\omega_1 + 1,05\omega_2 = 0 \\ 6v_y - 0,7\omega_1 - 0,6\omega_2 = 0 \\ 0 = -0,4\omega_1 + 0,5v_x + 0,87v_y \\ 0 = -0,4\omega_2 - 0,87v_x + 0,87v_y \\ 0,013\omega_t^2 + v_t^2 + (-0,2\omega_1 + v_x)^2 + (-0,35\omega_1 + v_y)^2 + 0,5(v_x^2 + v_y^2) + \\ + 1,5\left([0,35\omega_2 + v_x]^2 + [-0,2\omega_2 + v_y]^2\right) = 400 \\ -0,027\omega_t + 0,2v_x + 0,8(-0,2\omega_1 + v_x) - 0,44(0,35\omega_2 + v_x) = 0 \end{cases}$$

Giải hệ, tính được $\omega_t = -122,23 \text{ rad/s}$, $\omega_1 = -4,33 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 10,01 \text{ rad/s}$

Câu 2.

1. Thứ nguyên các đại lượng trong công thức: $v = (\epsilon_0 \epsilon)^{\alpha} S^{\beta} Y^{\gamma} \rho^{\eta}$

$$v = \frac{[L]}{[T]}; \epsilon_0 = \frac{[I]^2 [T]^2}{[M][L]^2}; s = \frac{[I][T]^3}{[M][L]}; Y = \frac{[M]}{[T]^2 [L]}; \rho = \frac{[M]}{[L]^3}$$

Phương trình thứ nguyên:

$$\frac{[L]}{[T]} = \frac{[I]^2 [T]^4}{[M][L]^2} \cdot \frac{[I][T]^3}{[M][L]} \cdot \frac{[M]}{[T]^2 [L]} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$$

Đồng nhất thức hai vế ta tìm được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma + \eta = 0 \\ -2\alpha - 3\beta - \gamma - 3\eta = 1 \\ 4\alpha + 3\beta - 2\gamma = -1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta có: $\alpha = 0$; $\beta = 0$; $\gamma = 1/2$; $\eta = -1/2$

$$\text{Tốc độ truyền sóng trong tấm: } v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 5,45 \cdot 10^3 \text{ (m/s)}$$

2. Thiết lập biểu thức tính mật độ điện tích mặt:

Biểu thức độ biến dạng tương đối

$$\delta(x, t): \delta(x, t) = u'_x = \frac{\omega}{v} u_0 \cos \frac{\omega}{v} \left(x - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Thay (4) vào phương trình xác định $\delta(x, t)$ của hệ (1) trong đề tìm được:

$$T(x, t) = Y \left[\frac{\omega}{v} u_0 \cos \frac{\omega}{v} \left(x - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t + \varphi) - s E_0 \cos \omega t \right] \quad (5)$$

Ứng suất T tại hai đầu tấm theo trục Ox ($x = 0$ và $x = b$) luôn bằng 0 tại mọi thời điểm, theo phương trình (5) điều này chỉ thỏa mãn khi $\varphi = 0$.

Áp dụng điều kiện biên, tính được giá trị u_0 :

$$\begin{cases} T(0, t) = 0 \\ T(b, t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\omega}{v} u_0 \cos \left(\frac{\omega b}{2v} \right) = s E_0 \Rightarrow u_0 = \frac{s \cdot v}{\omega \cdot h \cdot \cos \left(\frac{\omega b}{2v} \right)} E_0 \quad (6)$$

Thay biểu thức của $T(x, t)$ và $E(t)$ vào phương trình xác định $\sigma(x, t)$ trong hệ (1), ta xác định được biểu thức của mật độ điện tích mặt của tấm:

$$\sigma(x, t) = d_p \cdot Y \left[\frac{\omega}{v} u_0 \cos \frac{\omega}{v} \left(x - \frac{b}{2} \right) \cos \omega t - s E_0 \cos \omega t \right] + \varepsilon_0 \varepsilon E_0 \cos \omega t \quad (7)$$

Thay (6) vào (7) ta được:

$$\sigma(x, t) = \left[Y \frac{s^2}{\cos \left(\frac{\omega b}{2v} \right)} \cos \frac{\omega}{v} \left(x - \frac{b}{2} \right) - \varepsilon_0 \varepsilon \left(1 - Y \frac{s^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right) \right] E_0 \cos \omega t \quad (8)$$

Ta có thể thấy mật độ điện tích mặt của biến đổi theo tọa độ (trục x) và theo thời gian t.

3. Xác định biểu thức D_0 và tính k_p :

Để xác định điện tích bề mặt $Q(x, t)$ của tấm ta cần lấy tích phân hàm mật độ điện tích mặt $\sigma(x, t)$ trên mặt phẳng ($z = h$ hoặc $z = 0$) của tấm. Vì $\sigma(x, t)$ chỉ phụ thuộc hàm x nên $Q(x, t)$ được xác định bởi biểu thức:

$$Q = c E_0 \cos \omega t \int_0^b \left[Y \frac{s^2}{\cos \left(\frac{\omega b}{2v} \right)} \cos \frac{\omega}{v} \left(x - \frac{b}{2} \right) - \varepsilon_0 \varepsilon \left(1 - Y \frac{s^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right) \right] dx$$

Tính tích phân trên ta được kết quả:

$$Q(t) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{bc}{h} \left[Y \frac{s^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{2}{kb} \tan \frac{\omega b}{2v} + \left(1 - Y \frac{s^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right) \right] h E(t)$$

Đồng nhất thức hai vế của $Q(t)$ với phương trình (4) ta được:

$$D_0 = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{bc}{h}; k_p^2 = Y \frac{s^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 9,81 \cdot 10^{-3}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow 0$$

4.d. Khi điện trường đặt vào hai điện cực là điện trường đều thì

Xét giới hạn:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{Q(t)}{h E(t)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Q(t)}{U(t)} = \lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_0 \varepsilon \frac{bc}{h} \left[Y \frac{s^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} + \left(1 - Y \frac{s^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right) \right] = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{bc}{h}$$

Với $U(t) = h \cdot E(t)$ là hiệu điện thế giữa hai điện cực thanh.

$$Q(t) = Q = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{bc}{h} U = D_0 U$$

Đã biết với tụ điện $Q = CU$, từ đó $D_0 = C$ chính là công thức xác định điện dung của tụ điện phẳng. Trong đó thanh thạch anh đóng vai trò là lớp điện môi lấp đầy giữa hai điện cực.

Câu 3:

1.a) Sử dụng phương pháp điện tích ảnh (ảnh điện). Chọn hệ trục tọa độ cực (r, θ) có gốc trùng với tâm O của quả cầu.

Gọi tọa độ điện tích $q (L > r, \theta = 0)$. Điểm $P(r, \theta)$ có thể

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q'}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr\cos\theta}} + \frac{q}{\sqrt{r^2 + L^2 - 2rL\cos\theta}} \right) \quad (1)$$

Quả cầu nối đất $\varphi(R, \theta) = 0$, chọn hai điểm A, B nằm trên mặt cầu và đối xứng nhau, dễ dàng suy ra tọa độ của điện tích của điện tích ảnh $q' (d, \theta = 0)$:

$$d = \frac{R^2}{L}, q' = -q \frac{R}{L} \quad (2)$$

Mặt cầu dẫn nối đất:

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(L-d)^2} = -\frac{Rdq^2}{4\pi\epsilon_0(L^2-R^2)^2} = -\frac{R^3q^2}{4\pi\epsilon_0L(L^2-R^2)^2} \quad (3)$$

1.b) Hệ điện tích q và ảnh q' của nó tạo thế trên mặt cầu bằng 0. Muốn cho trên mặt quả cầu có thể không đổi V_0 , cần phải thêm điện tích Q đặt tại tâm quả cầu sao cho $Q = 4\pi\epsilon_0RV_0$.

Khi đó lực tương tác giữa q và quả cầu sẽ là lực tương tác giữa q và hai điện tích “ảnh” q' và Q . Ta có:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0L^2} + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(L-d)^2} = \frac{RqV_0}{L^2} - \frac{R^3q^2}{4\pi\epsilon_0L(L^2-R^2)^2} \quad (4)$$

1.c) Điện tích quả cầu là Q . Do đó, ngoài điện tích ảnh q' đặt tại d , còn phải thêm một điện tích “ảnh” nữa tại tâm O để trên mặt cầu điện thế không đổi. Điện tích đó là $q'' = Q - q'$ (cuối cùng điện tích tổng cộng của các ảnh vẫn bằng Q như giả thiết). Lực tương tác bây giờ là:

$$F = \frac{qq''}{4\pi\epsilon_0L^2} + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(L-d)^2} = \frac{q\left(Q + \frac{Rq}{L}\right)}{L^2} - \frac{R^3q^2}{4\pi\epsilon_0L(L^2-R^2)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0L} \left[\frac{QL + Rq}{L^2} - \frac{R^3q}{(L^2-R^2)^2} \right] \quad (5)$$

$$\mathbf{2.a)} \text{ Áp dụng công thức } V = \frac{kq_0}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{R} \Rightarrow q_0 = 4\pi\epsilon_0RV \quad (6)$$

2.b) Điện tích ảnh q_1 đặt tại một điểm ở phía bên kia của mặt phẳng dẫn cách mặt phẳng khoảng d_1 . Có $d_1 = d_0$, $q_1 = -q_0 = -4\pi\epsilon_0RV$

2.c) Sự phân bố của điện q_1 và q_2 là để làm cho điện thế trên mặt cầu bằng 0. Áp dụng (2) ý 1.a).

$$d_2 = d_0 - \frac{R^2}{d_0 + d_0}; q_2 = \frac{R}{d_0 + d_0} q_0$$

2.d) Một cách tương tự

$$d_3 = d_2 = d_0 - \frac{R^2}{d_0 + d_2}; q_3 = -q_2 = -\frac{R}{d_0 + d_0} q_0$$

$$d_4 = d_0 - \frac{R^2}{d_0 + d_2}; q_4 = \frac{R}{d_0 + d_2} q_2; q_5 = -q_4$$

$$d_5 = d_4 = d_0 - \frac{R^2}{d_0 + d_2}; q_5 = -q_4 = \frac{R}{d_0 + d_2} q_2$$

.....

Tổng quát ta có:

$$d_{2(n+1)} = d_0 - \frac{R^2}{d_0 + d_{2n}}; q_{2(n+1)} = \frac{R}{d_0 + d_{2n}} q_{2n} \quad (7)$$

$$d_{2(n+1)+1} = d_{2(n+1)}; q_{2(n+1)+1} = -q_{2(n+1)}$$

Lực tương tác giữa quả cầu dẫn và mặt phẳng dẫn bằng tổng hợp các lực tác dụng lên tất cả các điện tích trên cả hai mặt (bên phải và bên trái) của mặt phẳng dẫn.

Xét lần lượt các điện tích bên phải tác dụng lên các điện tích bên trái.

$$\begin{aligned}
F_{0-2(n+1)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_0 q_1}{(d_0 + d_0)^2} + \frac{q_0 q_3}{(d_0 + d_2)^2} + \dots + \frac{q_0 q_{2n+1}}{(d_0 + d_{2n})^2} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_0 q_{2n+1}}{(d_0 + d_{2n})^2} \\
F_{2-2(n+1)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_2 q_1}{(d_2 + d_0)^2} + \frac{q_2 q_3}{(d_2 + d_2)^2} + \dots + \frac{q_2 q_{2n+1}}{(d_2 + d_{2n})^2} + \dots \right] \quad (8) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_2 q_{2n+1}}{(d_0 + d_{2n})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dots\dots \\
F_{2m-2(n+1)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_{2m} q_1}{(d_{2m} + d_0)^2} + \frac{q_{2m} q_3}{(d_{2m} + d_2)^2} + \dots + \frac{q_{2m} q_{2n+1}}{(d_{2m} + d_{2n})^2} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{2m} q_{2n+1}}{(d_{2m} + d_{2n})^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Tổng quát ta có: } F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{2m} + q_{2n+1}}{(d_{2m} + d_{2n})^2}$$

2.d) Sử dụng kết quả ý a) và c), đặt $k_0 = d_0/R$,

$$k_{2(n+1)} = \frac{d_{2(n+1)}}{R} = k_0 - \frac{1}{k_0 + k_{2n}}$$

$$q_{2n} = \frac{1}{k_0 + k_{2n-2}} q_{2(n-1)} = \frac{1}{k_0 + k_{2(n-1)}} \frac{1}{k_0 + k_{2(n-2)}} \frac{1}{k_0 + k_{2(n-3)}} \dots q_0$$

Sử dụng kết quả ý e), ta có:

$$F = -4\pi\epsilon_0 V^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(k_0 + k_{2(n+1)})} \frac{1}{(k_0 + k_{2(m+1)})} \frac{1}{(k_{2m} + k_{2n})^2} = -4\pi\epsilon_0 V^2 f(k_0)$$

$F(k_0)$ là hàm chỉ phụ thuộc vào k_0 , vậy lực tổng hợp này tỉ lệ với V^2 , và $k_0 = d_0/R$.

Theo giả thiết: $F_1 = -4\pi\epsilon_0 V_0^2 f(k_{01})$ với $k_{01} = d_{01}/R_1 = 5$

$$F_2 = -4\pi\epsilon_0 (2V_0)^2 f(k_{02}) \text{ và } k_{01} = k_{02} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow F_2 = 4F_1$$

Thay số tính được: $F = 4,4 \cdot 10^{-12} \text{N}$

2.e) Vì tất cả các điện tích ảnh trên mặt phải mặt dẫn đều ở bên trong quả cầu, khoảng cách giữa hai điện tích bất kỳ bên ngoài (bên trái mặt phẳng) và bên trong quả cầu (bên phải mặt phẳng) phải lớn hơn $2(d_0 - R)$.

Khi đó ta có $d_0 + d_{2n-2} < 2(d_0 - R)$

Khi $d_0/R = 51$

$$|q_{2n}| = \frac{R}{d_0 + 2d_{2n-2}} |q_{2(n-1)}| < \frac{R}{2(d_0 - R)} |q_{2(n-1)}| = \frac{1}{2(d_0/R - 1)} |q_{2(n-1)}| = \frac{1}{100} |q_{2(n-1)}|$$

Như vậy, chỉ giữ lại số hạng $n = 1$, các cặp có sai số tỉ đối 1% là $q_0 q_1$, $q_0 q_3$, $q_1 q_2$ hay các cặp (0-1), (0-3) và (1-2) (Chú ý cặp (2-3) sai số 1/1000)

Khi đó tổng là lực tương tác

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0 q_1}{(d_0 + d_1)^2} + \frac{q_0 q_3}{(d_0 + d_3)^2} + \frac{q_1 q_2}{(d_0 + d_2)^2} \right) \quad (11)$$

Áp dụng:

$$k_0 = \frac{d_0}{R} = 51; q_1 = -q_0, q_2 = \frac{R}{d_0 + d_2} q_0 = \frac{1}{2(d_0/R + d_0/R - R/2d_0)} q_0$$

$$\approx \frac{1}{2.51} q_0, q_3 = -q_2$$

Tính được: $F \approx -\frac{\pi\epsilon_0 V^2}{51^2} \left(1 + \frac{1}{51}\right)$

2.g) Các số hạng trong khai triển là bậc của $\left(\frac{R}{2(d_0 - R)}\right)^2 = 10^{-4}$ trong ý trên là lực điện tương tác các cặp (0-5), (2-3) và (4-1) do đó ta có sai số tuyệt đối của lực trong trường hợp này là:

$$\Delta F = 4\pi\epsilon_0 V^2 \left[\frac{10^{-4}}{4k_0^2} + \frac{10^{-4}}{4(k_0 + k_4)^2} + \frac{10^{-4}}{4(k_1 + k_5)^2} \right] <$$

$$< 4\pi\epsilon_0 V^2 \left[\frac{10^{-4}}{4k_0^2} + \frac{10^{-4}}{4k_0^2} + \frac{10^{-4}}{4k_0^2} \right] = 3\pi\epsilon_0 V^2 10^{-4} \frac{1}{51^2}$$

Nếu ta xét lực điện tương tác của toàn bộ các cặp điện tích, thì sai số tuyệt đối có biểu thức:

$$\Delta F = 4\pi\epsilon_0 V^2 \left[\frac{10^{-4}R^2}{4d_2^2} + \frac{10^{-4}R^2}{4(d_0 + d_4)^2} + \frac{10^{-4}R^2}{4(d_1 + d_5)^2} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(d_{2m} + d_{2n})^2} \left(\frac{R}{2(d_0 - R)} \right)^{m+n} \right]$$

$$< 4\pi\epsilon_0 V^2 10^{-4} \left[\frac{3R^2}{4(d_0 - R^2/2d_0)^2} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2d_0 - 2R^2/2d_0)^2} \left(\frac{R}{2(d_0 - R)} \right)^{m+n} \right]$$

$$< 4\pi\epsilon_0 V^2 10^{-4} \frac{R^2}{4(d_0/R)^2} \left[3 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^2 \right] \approx 3\pi\epsilon_0 V^2 10^{-4} \frac{1}{(d_0/R)^2} \quad (2)$$

$$= 3\pi\epsilon_0 V^2 10^{-4} \frac{1}{51^2}$$

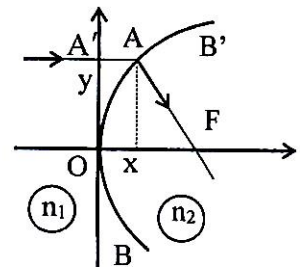
So sánh (1) và (2), sai số tỉ đối: $\delta F = \frac{\Delta F}{F_{(1)}} = \frac{3\pi\epsilon_0 V^2 10^{-4} \frac{1}{51^2}}{\frac{\pi\epsilon_0 V^2}{51} \left(1 + \frac{1}{51}\right)} < 3 \cdot 10^{-4}$

Vậy sai số tỉ đối lớn nhất có thể là 3×10^{-4}

Câu 4:

Khi ánh sáng truyền đi trong môi trường đồng tính, tia sáng biểu diễn sự truyền thẳng của ánh sáng, là pháp tuyến của mặt sóng ánh sáng. Quang trình của ánh sáng đó được gọi tắt là quang trình của tia sáng. Ánh sáng phát ra từ một điểm vật tại thời điểm t_1 , truyền đi theo các con đường khác nhau (ứng với đường truyền tia sáng khác nhau), tới thời điểm t_2 gặp nhau tại điểm ảnh thì quang trình từ điểm vật đến điểm ảnh của chúng là bằng nhau.

1. Xét ánh sáng truyền đi tạo ra tia sáng song song với trục x , cắt trục y tại A' , gặp mặt cong BB' tại A . (hình 4a). Vì quang trình của ánh sáng ứng với tia sáng từ vô cùng đến A và O và các tia sáng từ F tới vô cùng là như nhau, nên chỉ cần xét quang trình theo tia sáng từ trục y sang bên phải và tới F .



Hình 4a

Ta có quang trình A' đến F là:

$$s = n_1 |AA'| + n_2 |AF| = \text{hằng số} \quad (1)$$

$$\text{Từ hình 4a có thể viết: } |AA'| = x; \quad |AF| = \sqrt{(f-x)^2 + y^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) cho: } s = n_1 x + n_2 \sqrt{(f-x)^2 + y^2} \quad (3)$$

Đối với tia sáng theo trục x, quang trình từ O đến F là:

$$s' = n_2 |OF| = n_2 \cdot f \quad (4)$$

Từ (3) và (4), do quang trình bằng nhau, mà hai tia tới song song nhau nên: $s=s'$

$$\Rightarrow n_1 x + n_2 \sqrt{(f-x)^2 + y^2} = n_2 f \quad (5)$$

$$(n_2^2 - n_1^2)x^2 + n_2^2 y^2 - 2n_2(n_2 - n_1)fx = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + \frac{(n_2^2 - n_1^2)}{n_2^2} \left(x^2 - \frac{2n_2 x f}{n_1 + n_2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n_2^2 - n_1^2)}{n_2^2} \left(x - \frac{n_2 f}{n_1 + n_2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1} \right) f^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n_1 + n_2)^2}{f^2 n_2^2} \left(x - \frac{n_2 f}{n_1 + n_2} \right)^2 + \frac{1}{f^2} \left(\frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1} \right) y^2 = 1$$

Như vậy mặt tròn xoay có đường sinh BB' là một phần của:

+ Đường elip tròn xoay có tâm $\left(\frac{n_2 f}{n_1 + n_2}, 0 \right)$ nếu $n_2 > n_1$

+ Đường Hyperbol tròn xoay trong trường hợp $n_2 < n_1$

Khi $n_2 = \frac{3}{2}n_1$; từ (6) c ho:

$$5x^2 + 9y^2 - 6fx = 0 \Leftrightarrow 5 \left(x^2 - \frac{6fx}{5} \right) + 9y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \left(x - \frac{3f}{5} \right)^2 + 9y^2 = 9f^2 \Leftrightarrow \frac{5}{9f^2} \left(x - \frac{3f}{5} \right)^2 + \frac{1}{f^2} y^2 = 1 \quad (7)$$

Mặt cong là elip có tâm $\left(\frac{3f}{5}, 0 \right)$

2. Do tính đối xứng, bề dày của thấu kính lớn nhất ở vị trí qua tâm O và vuông góc với mặt phẳng của thấu kính, gọi $|OO'| = d$ là bề dày

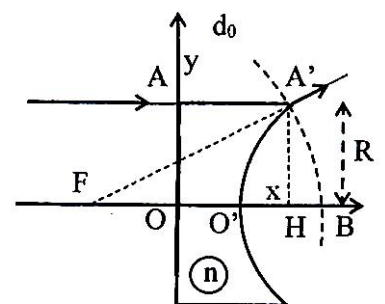
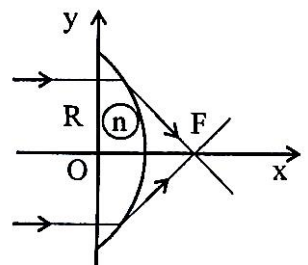
lớn nhất. Từ hình 4b có thể viết: $n|AA'| + |AF| = n.OO' + O'F$

(8)

$$\Leftrightarrow nx + \sqrt{(f-x)^2 + y^2} = f + (n-1)d \quad (9)$$

Khi $y = R$, $x = 0$ từ (9) tìm được: $d = \frac{\sqrt{f^2 + R^2}}{n-1} = 2\text{cm}$

3. Dựng mặt cầu có tâm tại F, bán kính FA, A là giao điểm của tia sáng song song với trục x với mặt cong thấu kính phẳng – lõm (hình 4c). Quang trình của ánh sáng tương ứng với các tia sáng FA' và FB đi từ B và A' tới vô cùng đều bằng nhau. Mặt khác



Hình 4c

quang trình ánh sáng tương ứng của các tia sáng song song từ $-\infty$ đến A và O cũng như nhau, nên quang trình của ánh sáng đi các đoạn AA' và OB là bằng nhau, vì vậy ta có:

$$n|A'A| = |O'O|n + |O'B|$$

$$n|A'A| = |O'O|n + |FB| - |FO'|$$

Với $|O'O| = d$, $|OF| = f$, $|A'A| = |OH| = x$

d là bề dày nhỏ nhất

$$nd - (f + d) = nx - \sqrt{(f + x)^2 + y^2} \quad (10)$$

Do tính đối xứng, bề dày của thấu kính nhỏ nhất ở vị trí qua tâm F và vuông góc với mặt phẳng của thấu kính. Khi $y = R$, $x = d_0$, tìm được:

$$d = \frac{nd_0 + f - \sqrt{(f + d_0)^2 + R^2}}{n - 1} \approx 0.0056(m)$$

Câu 5.

1. Phương trình chuyển động $\vec{r} = \vec{r}(t)$ là electron. Chỉ ra rằng chuyển động của electron phải cùng phương với lực cưỡng bức.

Lực do điện từ trường của sóng ánh sáng tác dụng lên electron là $\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$

Bỏ qua tác dụng của lực từ ở số hạng thứ hai $\vec{F} = e\vec{E} = e\vec{E}_0 \cos \omega t$

ĐLII Newton: $m\ddot{\vec{r}} = -m\gamma\dot{\vec{r}} - m\omega_0^2\vec{r} + e\vec{E}$

Thu được phương trình $\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e\vec{E}_0}{m} \cos \omega t$ (1)

Tìm nghiệm dưới dạng $\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \alpha)$ (1) trở thành:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\vec{r}_0 \cos(\omega t + \alpha) - \gamma\omega\vec{r}_0 \sin(\omega t + \alpha) = \frac{e\vec{E}_0}{m} \cos \omega t$$

Khai triển $\sin(\omega t + \alpha)$ và $\cos(\omega t + \alpha)$ sau đó đồng nhất hệ số hai vế ta thu được hệ phương trình với nghiệm $\vec{r}_0$ và α :

$$\begin{cases} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \alpha - \gamma \omega \sin \alpha \right] \vec{r}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m} & (a) \\ \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \alpha + \gamma \omega \cos \alpha \right] \vec{r}_0 = 0 & (b) \end{cases} \quad (2)$$

Giải phương trình (2b) ta thu được: $\alpha = -\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$ (3)

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\pm(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\mp \gamma \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

Ở đây ta sẽ chọn cặp dấu trên (dưới).

Thay $\cos \alpha$ và $\sin \alpha$ vào (2a):

$$\vec{r}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad \text{và} \quad \vec{r} = \frac{e\vec{E}_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

Véc tơ $\vec{r}$ và $\vec{E}_0$ cùng phương, chuyển động của êlectron cùng phương với lực cưỡng bức.

2. Công suất hấp thụ trung bình của êlectron là:

$$\begin{aligned}\langle W \rangle &= \langle \vec{F} \vec{v} \rangle = - \frac{e^2 E_0^2 \omega}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t + \alpha) \rangle \\ &= - \frac{e^2 E_0^2 \omega}{2m} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}\end{aligned}$$

$$\text{Với } \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t + \alpha) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t) \sin(\omega t + \alpha) dt = \frac{\sin \alpha}{2}$$

Thay $\sin \alpha$ ta tìm được:

$$\langle W \rangle = \frac{e^2 E_0^2}{2m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \frac{e^2 E_0^2}{2m} \frac{\gamma}{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right)^2 + \gamma^2} \quad (5)$$

Từ (5) ta nhận thấy rằng miền cộng hưởng $\omega \approx \omega_0$ là miền bức xạ điện từ bị hấp thụ mạnh nhất.

$$\text{Công suất hấp thụ trung bình cực đại: } \langle W \rangle_M = \frac{e^2 E_0^2}{2m\gamma} \quad (6)$$

3. Vì đã coi mật độ p hân tử của môi trường N là nhỏ và mỗi phân tử chỉ có một êlectron đóng góp vào sự phân cực, vì vậy véc tơ phân cực:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= Ne\vec{r} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E} \Rightarrow \vec{r} = \frac{\epsilon_0(n^2 - 1)}{Ne} \vec{E} \\ \Rightarrow \vec{r} &= \frac{e\vec{E}_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \alpha) = \frac{\epsilon_0(n^2 - 1)}{Ne} \vec{E}_0 \cos \omega t\end{aligned}$$

Nhân hai vế kết quả thu được với $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$, sau đó lấy trung bình hai vế kết quả vừa thu được, chú ý rằng:

$$\Rightarrow \vec{r} \vec{E} = \frac{eE_0^2}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \alpha) \cos \omega t = \frac{\epsilon_0(n^2 - 1)}{Ne} E_0^2 \cos^2 \omega t$$

$$\text{Vì } \langle \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t) \rangle = \frac{\cos \alpha}{2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2 \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}, \quad \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \vec{r} \vec{E} \rangle = \frac{eE_0^2 \cos \alpha}{2m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} = \frac{\epsilon_0(n^2 - 1)E_0^2}{2Ne} \quad (7)$$

$$\text{4. Rút } n^2 \text{ từ kết quả vừa tính: } n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (8)$$

Từ (8) ta xét giá trị tần số sóng điện từ trong 3 miền:

a) $\omega \ll \omega_0$ và $\gamma\omega \ll \omega_0^2 - \omega^2$, ứng với các dòng xoay chiều thường dùng trong kỹ thuật.

$$n^2 \approx 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0 \omega^2} > 1$$

Trường hợp này sóng không bị tắt dần (không có γ), chiết suất không phụ thuộc tần số của sóng tới, không có hiện tượng tán sắc.

b) $\omega \gg \omega_0$ và $\gamma\omega \ll \omega_0^2 - \omega^2$, ứng với các dòng xoay chiều thường dùng trong kỹ thuật.

$$n^2 \approx 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\omega^2} < 1$$

Trường hợp này sóng không bị tắt dần, chiết suất nhỏ hơn 1 và đồng biến cùng tần số ω của sóng tới. Hiện tượng này là tán sắc bình thường.

c) Miền sóng điện từ bị hấp thụ mạnh nhất. Lúc này $\omega \approx \omega_0$, từ (8):

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Chúng ta thấy nếu $\omega = \omega_0$ thì $n = 1$, nếu $\omega < \omega_0$ thì $n > 1$, nếu $\omega > \omega_0$ thì $n < 1$. Nghĩa là hiện tượng này là tán sắc dị thường.