Corpo negro

Luan de Souza Silva - Projeto Olímpicos

1. O que é o corpo negro

Na física, um corpo negro é um objeto hipotético que absorve toda a radiação incidente (daí o "negro" no nome), e emite toda a radiação absorvida.

Apesar de ser um objeto hipotético, em algumas situações, podemos fazer uma primeira aproximação considerando objetos reais como corpos negros. Um exemplo seria considerar metais, pessoas ou mesmo estrelas como corpos negros aproximados. Além disso, podemos fazer algumas correções para melhorar a aproximação (considerando albedo e emissividade, por exemplo). Um outro tipo de corpo que se adequa mais a realidade seria o chamado **corpo cinza**.

Além de emitir toda radiação incidente, o corpo negro também emite em todos os comprimentos de onda, seguindo uma distribuição, cujas características dependerão da temperatura do corpo, como veremos adiante.

2. Lei de Stefan-Boltzmann

A Lei de Stefan-Boltzmann é uma relação que foi obtida experimentalmente. Entretanto, com uma teoria mais avançada, podemos obtê-la de forma teórica também.

Enfim, eis a Lei de Stenfan-Boltzmann:

$$\boxed{P = A\sigma T^4}$$

Em que P é a potência emitida pelo corpo, A é a área superficial do corpo, σ é a constante de Stefan-Boltzmann e T é a temperatura efetiva do corpo (em Kelvin).

Considere, por exemplo, que o Sol seja um corpo negro de temperatura superficial igual a 5700K e raio $7 \cdot 10^8$m. Temos então que sua luminosidade é

$$L = 4\pi(7 \cdot 10^8)^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot (5700)^4$$

$$\boxed{L \approx 3{,}69 \cdot 10^{26} W}$$

O que é um ótimo resultado, considerando que usamos valores aproximados, e que a luminosidade real do Sol é $L = 3{,}83 \cdot 10^{26}$W.

3. Lei de Planck e suas aproximações

No fim do século 19, o espectro de radiação de corpo negro era um desafio para a Ciência, pois os modelos teóricos, como as leis de Wien e Rayleigh-jeans funcionavam apenas para certos intervalos de comprimento de onda.

Entretanto, o físico Max Planck solucionou o problema propondo que a luz deveria emitir em frequências específicas. Assim, a energia de um fóton seria

$$\boxed{E = h\nu}$$

Em que h é a constante de Planck e ν é a frequência.

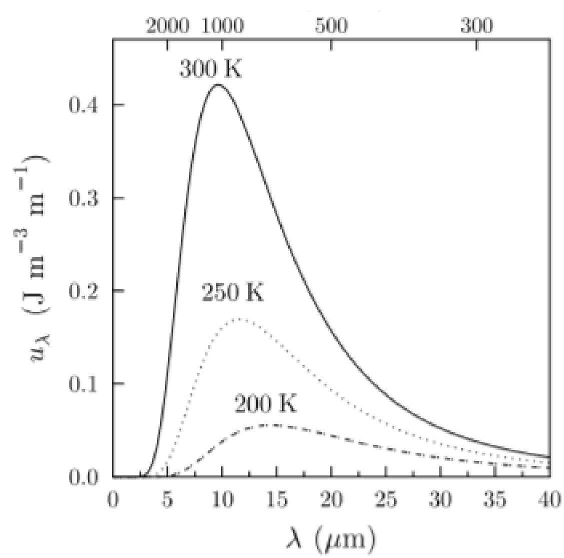
A partir disso, Planck chegou à seguinte relação:

$$\boxed{B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}}$$

Em que B_ν é a intensidade especifica, que é basicamente a potência emitida por frequência por ângulo sólido e por unidade de área.

Esta distribuição também pode ser dada em termos do comprimento de onda:

$$\boxed{B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1}}$$



para chegar na Lei de Stefan-Boltzmann basta tomar a integral imprópria de algumas dessas definições, por exemplo

$$P = A\pi \int_0^\infty B_\nu(\nu, T) d\nu$$

Podemos agora fazer duas aproximações.

Considere $\lambda >> 0$, assim, o termo $\exp(hc/\lambda kT)$ fica muito menor que 1, e podemos, assim, usar $e^{ax} \approx 1 + ax$. Assim

$$I(\lambda, T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{1 + hc/\lambda kT - 1}$$

$$\Rightarrow I(\lambda, T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{\lambda kT}{hc}$$

$$\boxed{I(\lambda, T) \approx \frac{2ckT}{\lambda^4}}$$

Que é a **Lei de Rayleigh-Jeans**.

Podemos também tomar $\lambda << 1$, assim, o termo $\exp(hc/\lambda kT)$ fica muito maior que 1, e assim podemos escrever

$$\boxed{I(\lambda, T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot e^{-hc/\lambda kT}}$$

Que é a **Aproximação de Wien**.

4. Lei de Wien

Uma coisa muito útil para muitas áreas, como a astronomia, por exemplo, é determinar em que frequência ou comprimento de onda ocorre a máxima emissão do corpo.

Para este problema, podemos empregar a **Lei de Wien**, que pode ser obtida otimizando a função de Planck:

$$\frac{\partial B_\lambda}{\partial \nu} = 0$$

Fazendo as contas, chegamos que o comprimento de onda de máxima emissão é

$$\boxed{\lambda_{max} = \frac{b}{T}}$$

Em que b é a constante de Wien.

5. Exemplos na astronomia

5.1 *Estimando a temperatura de um planeta*

Com a aproximação do corpo negro, junto com correções simples, podemos estimar a temperatura superficial de planetas, por exemplo.

Considere um planeta de raio R, albedo A, que orbita uma estrela de luminosidade L a uma distância d. Se o Planeta está em equilíbrio térmico com a estrela, e sempre aponta a mesma face para a estrela, temos

$$P_{absorvida} = P_{emitida}$$

$$\Rightarrow F_{estrela} \cdot \pi R^2(1 - A) = 2\pi R^2 \sigma T^4$$

$$\Rightarrow \frac{L}{4\pi d^2}\pi(1 - A) = 2\pi\sigma T^4$$

$$\Rightarrow T^4 = \frac{L(1 - A)}{8\pi\sigma d^2}$$

$$\boxed{T = \left(\frac{L(1 - A)}{8\pi\sigma d^2}\right)^{1/4}}$$

5.2 Estrelas variáveis

Como dito anteriormente, podemos aproximar estrelas para corpos negros. Um caso interessante em que podemos fazer isso é o de estrelas variáveis, como as Cefeidas, por exemplo.

Estas estrelas, quando se expandem, emitem uma luminosidade menor, o que parece contraintuitivo, pois sua área de superfície aumenta. Mas acontece que ao mesmo tempo que sua superfície aumenta, sua temperatura superficial diminui, e pela Lei de Stefan-Boltzmann, sabemos que a luminosidade é muito mais sensível à variações de temperatura que de área.

5.3 Fontes de rádio

Quando estuda-se emissões de rádio em radio-galáxias e quasares, por exemplo, é muito comum em falar de densidade de fluxo. Para calcular a densidade de fluxo de um corpo, precisamos considerar o ângulo sólido que compreende este corpo.

Considere um objeto esférico de raio R a uma distância d, e que tem uma densidade específica (como a Função de Planck ou Lei de Rayleigh-Jeans, por exemplo) I. Temos que o ângulo sólido será

$$\Omega = \pi \frac{R^2}{d^2}$$

Assim, a densidade de fluxo fica

$$D = I\Omega$$

$$\boxed{D = I\pi \frac{R^2}{d^2}}$$

Sendo que D seja medido em Janskys.

Para emissões em rádio, é comum utilizar a Aproximação de Rayleigh-Jeans.

6. Problemas

Problema 1. (IOAA 2017)Um rádio telescópio está equipado com um receptor que pode observar na faixa de frequências de 1,32 a 1,52 GHz. O limite de detecção é de 0,5 mJy por feixe para um tempo de integração de 1 minuto. Em um levantamento de galáxias, a luminosidade da linha espectral de HI de uma galáxia típica é de 28 10 W, com largura de linha de 1 MHz. Para um feixe tão grande, a região emissora de HI de uma galáxia distante pode ser aproximada por uma fonte pontual. A linha espectral da transição spin-flip do HI possui frequência no referencial de repouso de 1,42 GHz. Qual o maior redshift z de uma galáxia HI típica que pode ser detectado por um levantamento realizado com este rádio telescópio com um tempo de integração de 1 minuto? Considere em seus cálculos que o redshift é pequeno e que portanto pode ser usada a aproximação não-relativística. Use 1 $Jy = 10^{-26} W m^{-2} Hz^{-1}$.

Problema 2. (IOAA 2016)A estrela β-Doradus é uma estrela variável Cefeida com um período de pulsação de 9.84 dias. Vamos fazer uma simplificação na qual a estrela brilha mais quando está mais contraída (raio R_1) e menos brilhante quando está mais expandida (raio R_2). Considere que a estrela mantém sua forma esférica, e que se comporta com um corpo negro durante todo seu ciclo. A magnitude bolométrica da estrela varia de 3.46 a 4.08. A partir de medidas Doppler, sabemos que durante a pulsação a superfície da estrela se expande e se contrai a uma velocidade radial média de 12.8 km s!!. Ao longo do período de pulsação, o pico da radiação térmica intrínseca da estrela varia de 531.0 nm a 649.1 nm.

a) Encontre a razão dos raios da estrela nos seus estados de maior contração e expansão (R_1/R_2)

b) Encontre o raio da estrela (em metros) nos seus estados de maior contração e expansão (R_1 e R_2).

c) Calcule o fluxo F_2 da estrela no seu estado de maior expansão.

d) Encontre a distância D até a estrela, em parsecs.

Problema 3. (IOAA 2015)Um forte sinal contínuo de rádio vindo de um corpo celeste foi observado como uma explosão de curtíssima duração de 700 µs. A densidade de fluxo observada na frequência de 1660 MHz foi de 0,35 kJy. Se a fonte estiver a uma distância conhecida de 2,3kpc, estime a temperatura de brilho desta fonte.

Problema 4. (IOAA 2015) Considere que o Sol e Vênus se comportam como corpos negros perfeitos. Vênus, que está a uma distância orbital de 0,72 UA, possui temperatura t_v, e está em equilíbrio térmico (isto é, irradia a mesma quantidade de energia que recebe do Sol). Suponha que, na sua maior aproximação da Terra, o diâmetro angular de Vênus é de 66 segundos de arco. Qual a densidade de fluxo de Vênus, no momento de sua maior aproximação da Terra, quando observado com um rádio telescópio na frequência de 5 GHz?

Problema 5. (IOAA 2013)Uma estrela possui temperatura efetiva T_{ef} = 8700 K, magnitude absoluta M = 1,6 e magnitude aparente m = 7,2. Encontre (a) a distância r até esta estrela; (b) sua luminosidade L; e (c) seu raio R. Ignore os efeitos de extinção

Problema 6. (IOAA 2013)Uma estrela possui magnitude visual aparente m_v = 12,2 mag, paralaxe π = 0,001" e temperatura efetiva T_{ef} = 4000 K. Sua correção bolométrica é B.C. = –0,6 mag. (a) Encontre sua luminosidade em função da luminosidade solar. (b) Que tipo de estrela é esta: (i) uma gigante vermelha (ii); uma gigante azul; ou (iii) uma anã vermelha? Escreva (i), (ii) ou (iii) na sua folha de respostas.

7. Gabarito

Problema 1. $z = 0{,}0929$

Problema 2. a)$\dfrac{R_1}{R_2} = 0{,}890$
b)$R_1 = 4{,}41 \cdot 10^{10} m$ e $R_2 = 4{,}95 \cdot 10^{10} m$
c)$F = 6{,}51 \cdot 10^{-10} W/m^2$
d)$D = 298 pc$

Problema 3. $T = 1{,}5 \cdot 10^{26} K$

Problema 4. $20{,}2 Jy$

Problema 5. $R = 1{,}35 \cdot 10^9 m$

Problema 6. $L = 17{,}7 L_\odot$ e (i) Uma Gigante Vermelha