

# Fotometria

Breno de Carvalho - [Projeto Olímpicos](#)

## 1. Introdução

---

Quase tudo que conhecemos do Universo, como a estrutura do interior estelar, o movimento dos planetas ao redor do Sol e supernovas são provenientes das interpretações de um órgão sensorial deveras importante para nós: o olho. Já que não há como irmos, por exemplo, até uma estrela (sem virar churrasquinho), não é possível, em primeira instância, aferir algumas características intrínsecas, como sua composição química e sua massa; isso é muito importante para tentarmos desvendar o misterioso Universo e, também, montarmos o quebra-cabeça de sua história.

Podemos fazer esses cálculos hoje graças à luz que recebemos dos astros do céu, ou seja, seus brilhos. Uma das únicas coisas que recebemos dos astros é radiação e, com parâmetros matemáticos, físicos e químicos, conseguimos encurtar o caminho entre nosso conhecimento e a imensidão do cosmos. Agora, vejamos mais algumas belezas da natureza.

## 2. Luz e suas propriedades

---

Como enxergamos? Essa é uma das perguntas que perseguiu a humanidade por longos séculos. Inicialmente, Aristóteles propôs que nada emitia luz, os corpos que tinham certos graus de transparência e assim, conseguiríamos enxergá-los.

Já no século XVII, Isaac Newton publica seu livro *Opticks*, onde retrata seus estudos experimentais, que resultaram na luz como partícula, isto é, a teoria corpuscular da luz. Em oposição, Christiaan Huygens lança seu livro *Traité de la lumiére*, favorecendo a uma teoria ondulatória da luz. Mas, nenhum deles esperavam que ela se encaixa nesses dois tipos.

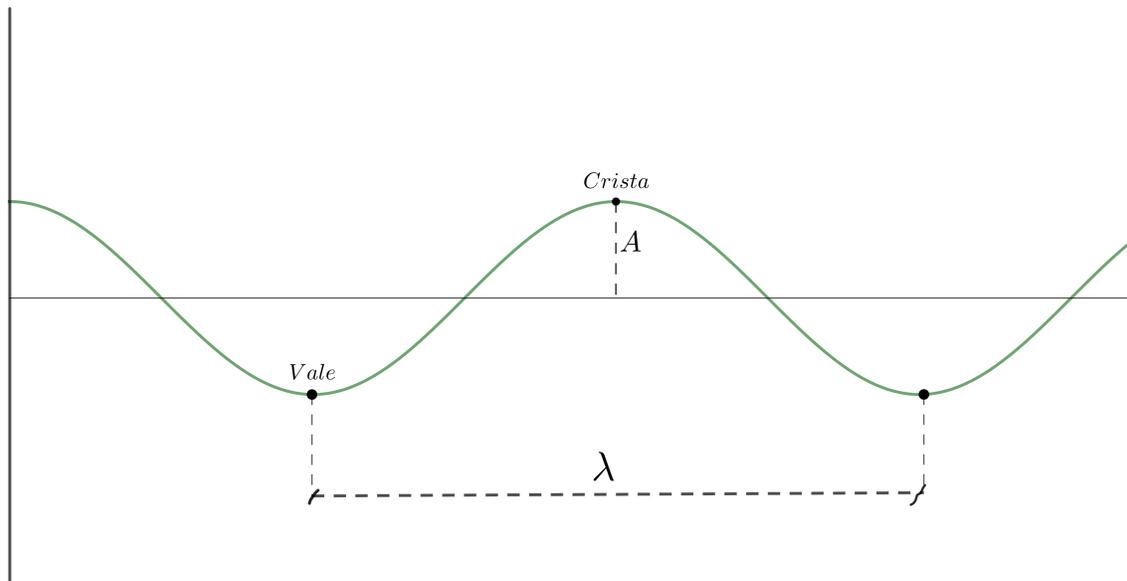
Além disso, por muito tempo acreditou-se que a luz tinha velocidade infinita. Isso perdurou até o astrônomo dinamarquês Ole C. Romer, no século XVII, estimou sua velocidade observando um eclipse de uma das luas de Júpiter, Io. Para aprofundamento nessa história, recomendo [esse vídeo](#) do canal Ciência Todo Dia, do Pedro Loos.

Com a ascensão da mecânica quântica e experimentos cada vez mais refinados e elegantes, foi possível determinar que, na verdade, a luz se trata de uma dualidade onda-partícula. Mas, aqui trataremos de sua natureza ondulatória :)

### 2.1 *Um pouco de ondulatória*

Uma onda é, basicamente, um pulso (perturbação oscilatória) que transporta energia sem transportar matéria. Vejamos algumas de suas características quando atribuimo-nas sentidos matemáticos e físicos:





- **Crista:** Ponto mais alto de uma onda, em relação ao estado de repouso;
- **Vale:** Ponto mais baixo de uma onda, em relação ao estado de repouso;
- **Comprimento de onda  $\lambda$ :** Distância entre duas cristas ou dois vales consecutivos;
- **Amplitude  $A$ :** Menor distância entre uma crista, ou um vale, e o estado de repouso.

Agora, imagine o *vale*, por exemplo, como um ponto fixo (não à onda). Colocamos um cronômetro pra contabilizar o tempo e aferimos quantas ondas passarão, nesse tempo medido, pelo ponto definido. Essa será a **frequência  $\nu$**  da onda. O **período  $T$**  será o inverso, sendo interpretado como o tempo que leva para uma onda passar pelo determinado ponto. Matematicamente,

$$v = \lambda\nu \quad \text{ou} \quad v = \frac{\lambda}{T}$$

Sendo  $v$  a **velocidade de propagação da onda**. Para a velocidade da luz no vácuo, utilizamos  $c$ .

## 2.2 Espectro eletromagnético

James Clerk Maxwell, um físico inglês, foi o que bateu o martelo à teoria do eletromagnetismo. Além de unir dois campos da física, que até então eram relativamente distantes, demonstrou que a luz se propagava em ondas elétricas e magnéticas e que seus campos também se propagam na velocidade da mesma. Nesse instante, a luz passa a ser um tipo de **radiação eletromagnética**.

Dois séculos antes, Isaac Newton fez a primeira decomposição da luz, experimentalmente, utilizando um prisma. A luz oriunda do Sol, branca, passava por um orifício, logo em seguida se refratava em diferentes comprimentos de onda ao passar por um prisma. Na parede, projetava-se o que hoje conhecemos por **espectro visível**.





Atualmente, sabe-se que só conseguimos enxergar certos comprimentos de onda, pelo menos diretamente, mas há muitas “cores” além disso, que estão distribuídas por todo o espectro eletromagnético. Na figura acima, há cores por toda a placa branca, mas são invisíveis aos nossos olhos.

Um exemplo está na sua casa, provavelmente, que é o micro-ondas. No momento do aquecimento, ondas, na faixa das micro-ondas, estão sendo irradiadas por ali, esquentando o que quer que seja que está dentro dele. Ao olharmos para seu interior, apenas enxergamos o objeto girando igual ao [Pião da Casa Própria](#), mas não enxergamos as micro-ondas, pois são invisíveis para nós. Essas micro-ondas também fazem parte do espectro.

O espectro eletromagnético **classifica** e **ordena** os comprimentos de onda, ou frequências, das ondas eletromagnéticas. A seguir, a figura representa esse, seguido de algumas comparações.

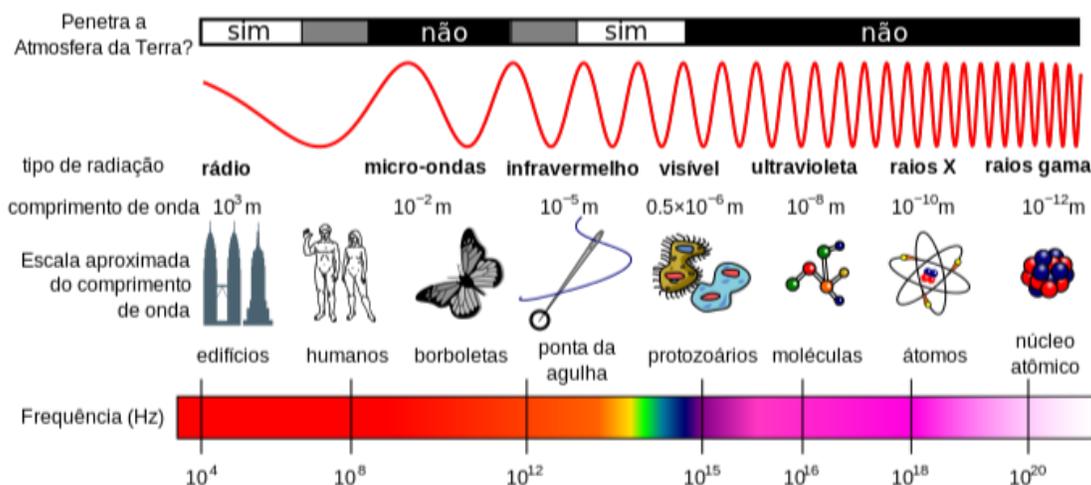


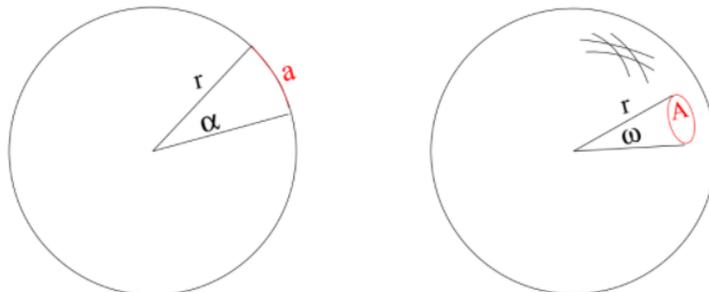
Figura 1: O espectro eletromagnético

### 3. Esferas

Utilizaremos alguns conceitos de geometria espacial aqui, mais especificamente, sobre esferas. Dessa forma, é interessante que revisemos algumas propriedades.



Um conceito bastante utilizado é o ângulo sólido  $\omega$ , que é análogo a um segmento de arco numa circunferência. Observe a imagem a seguir:



Relacionando,

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{A}{r^2}$$

Enquanto  $a$  é o comprimento do arco da circunferência em relação ao ângulo  $\alpha$ ,  $A$  é a medida da área em relação ao ângulo  $\omega$ .

A área total da esfera é dada por

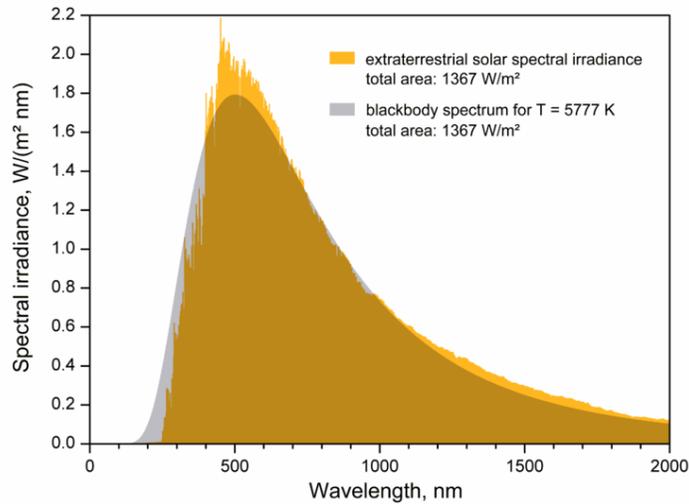
$$A = 4\pi r^2$$

## 4. O corpo negro

---

Pelas leis da termodinâmica, todo corpo que possui temperatura maior que o *zero absoluto* emite radiação em todos os comprimentos de onda. Isso, na prática, não ocorre de forma bonita, o Universo é um caos! Então, para que se estudasse as radiações de forma “bonitinha”, foi criado o modelo do **corpo negro**. Segundo Kirchhoff, um corpo negro é objeto teórico que absorve toda luz (radiação) que nele incide, não refletindo nada e por isso, é negro. Já que sua temperatura se altera ao absorver energia, emite-a em forma de radiação. Considera-se, também, que está em equilíbrio termodinâmico, ou seja, irradia energia à mesma medida que absorve. Dessa forma, é tanto um absorvedor perfeito, quanto um emissor perfeito. Vale ressaltar, novamente, que é apenas teórico, ou melhor, aproxima-se bastante do real. Observe essa aproximação no gráfico abaixo, que representa um comparativo da irradiância espectral solar em função do comprimento de onda.





A luz emitida por um corpo negro se propaga de forma esférica e isotrópica no vácuo. A fonte da irradiância se encontra no centro dessa “esfera de luz”. Nesse sentido, utilizamos o conceito de **intensidade específica**, que é a energia que transita por unidade de tempo, por unidade de área e por unidade de ângulo sólido.

$$I_{\perp} = \frac{dE}{dt dA d\omega}$$

Já a **intensidade específica monocromática**, é a intensidade específica emitida em um intervalo infinitesimal de frequências.

$$I_{\nu\perp} = \frac{dE}{dt dA d\omega d\nu}$$

Também é possível converter a frequência  $\nu$  para o respectivo comprimento de onda  $\lambda$  e escrever a intensidade específica monocromática em função de  $\lambda$ .

$$I_{\nu\perp} = \frac{dE}{dt dA d\omega d\nu} \frac{d\lambda}{d\lambda} \Rightarrow I_{\nu\perp} d\nu = \frac{dE}{dt dA d\omega d\lambda} d\lambda \Rightarrow I_{\nu} |d\nu| = I_{\lambda} |d\lambda|$$

Também é bastante utilizada a seguinte notação:  $B_{\nu} |d\nu| = B_{\lambda} |d\lambda|$ .

O **fluxo** é a integração da intensidade em todos os comprimentos de onda.

$$F = \frac{dE}{dt dA}$$

Posto isso, iniciaram os estudos experimentais utilizando os conceitos de corpos negros definidos por Gustav Kirchhoff. À proporção que os anos se passavam, mais dados foram colhidos, baseando-se na radiação de corpo negro, e inseridos em gráficos. Esses, representam a distribuição de radiação de corpos negros.



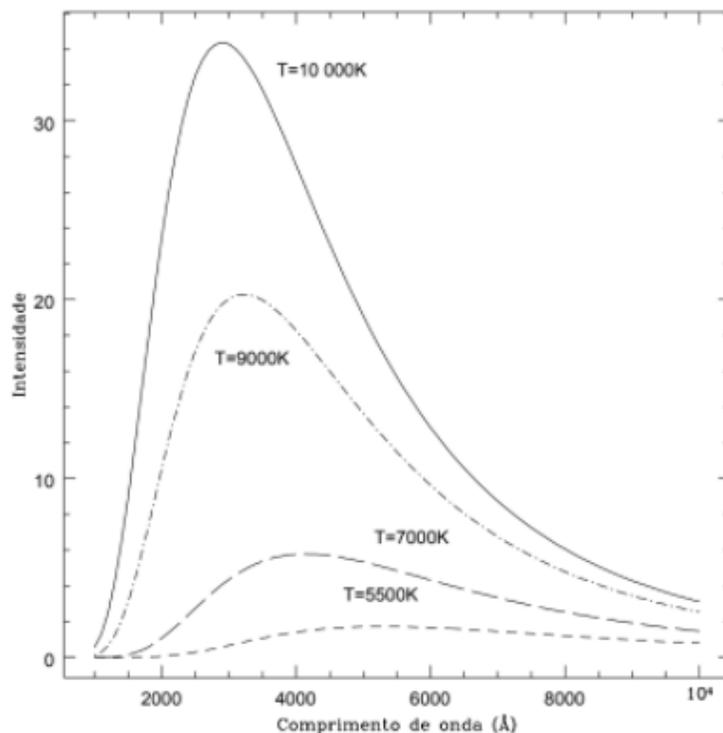


Figura 2: Distribuição da radiação de corpo negro

Uma primeira tentativa de encontrar a lei dessa função foi feita pelos cientistas ingleses Lord Rayleigh e James H. Jeans, que utilizaram fundamentos da física clássica para isso (já que não havia quântica). Essa lei é conhecida por *Lei de Rayleigh-Jeans*. Por análise dimensional, deduz-se a equação:

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

Em que  $c$  é a velocidade da luz,  $k$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura em um determinado comprimento de onda  $\lambda$ . Essa fórmula se adapta muito bem a **altos comprimentos de onda**, todavia percebe-se que quanto menor for  $\lambda$ , maior será  $B_{\lambda}$  e que, numa situação extrema, extrapola na distribuição, indo para o infinito na faixa do ultravioleta. Esse ocorrido ficou conhecido como a **catástrofe do ultravioleta**.



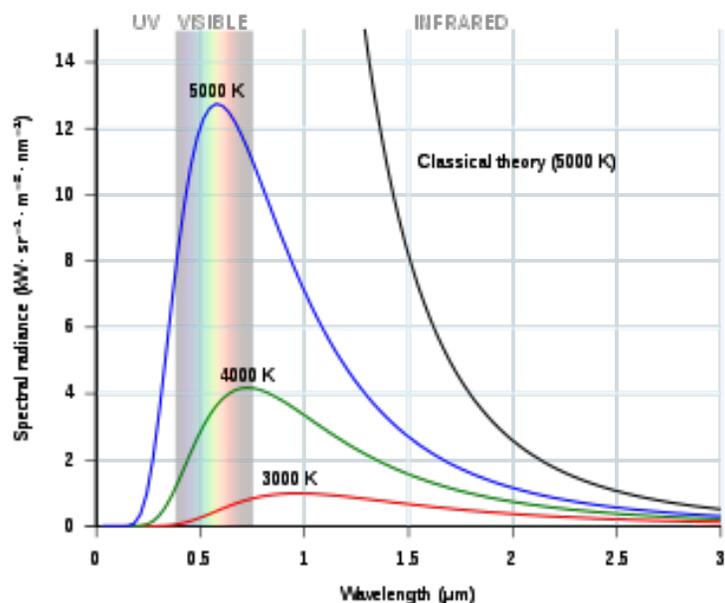


Figura 3: A catástrofe do Ultravioleta

O alemão Wilhelm Wien também encontrou uma equação que se aproximava bastante da curva teórica, porém apenas para **baixos comprimentos de onda**.

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}$$

Essas, como dito, são apenas aproximações, mas são bastante utilizadas até hoje. Em 1900, aos seus 42 anos, um professor da Universidade de Berlim, que havia substituído Gustav Kirchhoff após sua morte, corrigiu a equação proposta por Rayleigh e Jeans. Seu nome é Max Karl Ernst Ludwig Planck ou simplesmente, Max Planck, o pai da mecânica quântica.

A lei de Planck se encaixa perfeitamente nos dados obtidos experimentalmente, e é descrita por:

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

E em função da frequência,

$$B_{\lambda}d\lambda = B_{\nu}d\nu ; \frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{\lambda^2}{c} \Rightarrow B_{\nu} = B_{\lambda} \frac{\lambda^2}{c}$$

$$B_{\nu} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \frac{\lambda^2}{c}$$

$$B_{\nu} = \frac{2h\nu}{\lambda^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

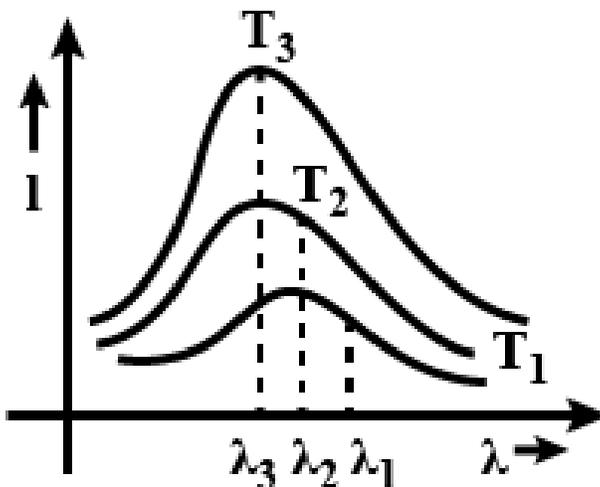
$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$



## 5. Lei do deslocamento de Wien

---

Observe que, na figura abaixo, os picos de emissão em determinados comprimentos de onda estão sendo destacados por determinadas temperaturas, isto é, a cada temperatura, o comprimento de onda se desloca pelo gráfico. Coincidência, não?



Analisando o gráfico atentamente e utilizando cálculo, percebe-se que a temperatura e o comprimento de onda máximo são inversamente proporcionais. Essa relação é dada por:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

Sendo  $b \approx 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$ .

## 6. Luminosidade e Fluxo

---

Como dito anteriormente, a única informação que temos dos astros é a luz que recebemos deles, ou seja, seus brilhos. Quando recebemos essas informações, por meio da radiação, cabe a nós analisarmos e criarmos modelos que possibilitem um aprofundado estudo sobre isso, definindo grandezas e encontrando relações matemáticas.

Daí surge a **luminosidade** de uma estrela, que é a potência luminosa emitida por ela, ou seja, sua emissão de energia por segundo; sendo assim, uma **grandeza intrínseca**. O seu brilho, percebido por nós, o **fluxo aparente**, é taxa de emissão de energia que passa pela área da “esfera” de luz. Para um observador a uma distância  $d$  da fonte luminosa, observará um fluxo aparente regido pela seguinte equação:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$



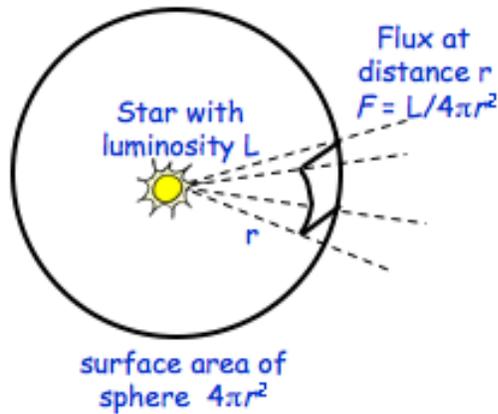


Figura 4: Fluxo aparente

## 6.1 Lei de Stefan-Boltzmann

O **fluxo intrínseco**, como o próprio nome sugere, não depende da distância do observador à fonte luminosa, e sim só dessa. É dado pela famosa **Lei de Stefan-Boltzmann**.

$$F = \sigma T^4$$

Onde  $T$  é a temperatura efetiva da estrela, já que a consideramos como um corpo negro, e a **constante de Stefan-Boltzmann** mede  $\sigma \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ .

Podemos encontrar uma equação para a luminosidade, considerando que a “esfera de luz” é a própria superfície da estrela, logo tem o mesmo raio  $R$  da estrela:

$$F = \frac{L}{4\pi R^2} \Rightarrow L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

## 6.2 Albedo

No interior estelar, incontáveis reações nucleares acontecem a todo instante, e a energia é liberada na forma de radiação, luz. Por outro lado, planetas, asteroides, cometas e até você não fazem isso; nós apenas refletimos, que é algo totalmente passivo; isso se não considermos como corpos negros.

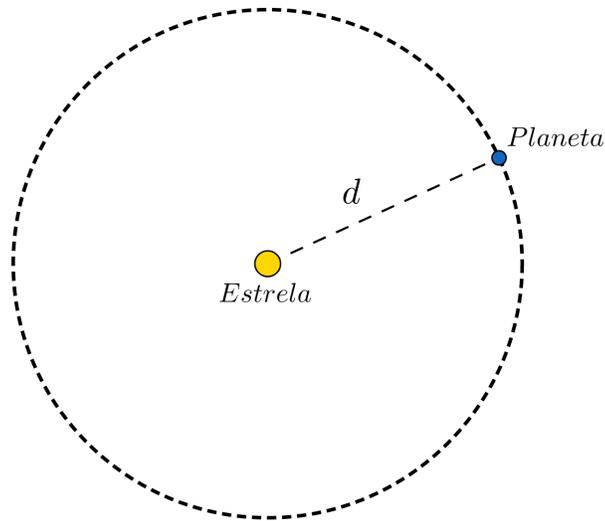
Ao considerarmos corpos negros, por definição, não refletiriam sequer luz, porém, para fins de maior aproximação com a realidade, alguns corpos negros apresentam tais índices de reflexão, que é o **albedo**  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{\text{Radiação refletida}}{\text{Radiação incidente}}$$

Entretanto, perceba que essa definição contradiz a própria definição do corpo negro; particularmente, prefiro chamar esses de “corpos cinzas”, já que estão no intermediário entre o preto e o branco. Pode-se considerar, também, que o “corpo cinza” não é um corpo negro perfeito, e sim apenas emite como um.

Considere a seguinte situação:





A potência luminosa absorvida pelo planeta será igual à sua luminosidade. Primeiramente, considere o planeta tendo rápida rotação (a radiação nele incidente atinge o planeta inteiro de forma homogênea), sendo  $R_p$  o raio do planeta, é possível encontrar sua temperatura, desprezando eventuais atividades atmosféricas.

$$L_p = F_E \pi R_p^2 (1 - \alpha) \Rightarrow 4\pi R_p^2 \sigma T^4 = \frac{L_E}{4\pi d^2} \pi R_p^2 (1 - \alpha)$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{L_E (1 - \alpha)}{16\pi \sigma d^2}}$$

Caso consideremos um planeta que não rotaciona rapidamente ao redor de seu eixo, somente um hemisfério seu será responsável pela absorção. Portanto, na luminosidade, em vez de utilizarmos  $4\pi$ , utilizaremos  $2\pi$ . Logo,

$$T = \sqrt[4]{\frac{L_E (1 - \alpha)}{8\pi \sigma d^2}}$$

## 7. Escala de magnitudes

O matemático e astrônomo Hiparco, com certeza, foi um dos grandes gênios da Grécia Antiga. Ele deu início aos estudos de trigonometria esférica, deduziu o movimento de precessão da Terra e também foi o primeiro a adotar a divisão de uma circunferência em  $360^\circ$ . Além disso, catalogou o brilho aparente das estrelas em uma escala de magnitudes, sendo 1 a mais brilhante e 6 a menos brilhante, em 100 vezes. Ou seja, quanto maior a magnitude, menos brilhante será, e vice-versa.

Agora, vejamos sua ideia sendo aplicada de forma algébrica.

### 7.1 Magnitude aparente

Sabendo que, por definição, o brilho aparente de uma estrela de magnitude 1 é 100 vezes maior que o brilho aparente de uma estrela de magnitude 6:  $\frac{F_1}{F_6} = 100$ .



O brilho aparente de uma estrela de magnitude 1 ( $m_1$ ), por exemplo, é  $f$  vezes maior que o brilho aparente de uma estrela de magnitude 2 ( $m_2$ ) e assim por diante. Logo,

$$\frac{F_1}{F_6} = \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{F_2}{F_3} \cdot \frac{F_3}{F_4} \cdot \frac{F_4}{F_5} \cdot \frac{F_5}{F_6} = 100 \Rightarrow f^5 = 100 \Rightarrow f \approx 2,5$$

Substituindo,  $\frac{F_1}{F_6} = 2,5^5$ . Escrevendo-a de forma arbitrária,  $\frac{F_A}{F_B} = 2,5^{(m_B - m_A)}$ . Essa, pode ser desenvolvida até a clássica **Equação de Pogson**:

$$\log\left(\frac{F_A}{F_B}\right) = \log(2,5^{\Delta m}) \Rightarrow m_B - m_A = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_B}{F_A}\right)$$

A magnitude da estrela Vega ( $\alpha$  Lyr) é bastante usada para comparações, já que sua magnitude aparente é bem próxima de zero. Portanto,

$$m = -2,5 \log\left(\frac{F}{F_0}\right) = -2,5 \log(F) + 2,5 \log(F_0) \Rightarrow m = -2,5 \log(F) + C$$

Onde  $C$  é a **constante de calibração**.

## 7.2 Magnitude absoluta

A magnitude absoluta é uma escala que foi criada para comparar magnitudes, independente da distância do astro até nós, ou seja, é “universal”. Para isso, definiu-se que ela seria o brilho de uma estrela considerando a mesma a 10 pc de distância de nós. Ou seja, é ainda uma magnitude aparente, mas levamos em conta como se todas as estrelas estivessem a 10 pc de nós.

Sendo  $d = 10$  pc,

$$m_B - m_A = -2,5 \cdot \log\left(\frac{\frac{L_B}{4\pi d^2}}{\frac{L_A}{4\pi d^2}}\right) \Rightarrow M_B - M_A = -2,5 \cdot \log\left(\frac{L_B}{L_A}\right)$$

Denotamos a magnitude absoluta como  $M$ .

## 7.3 Módulo de distância

Essa equação nos permite calcular, de forma mais direta, a distância entre nós e algum astro. Sendo  $m$  a magnitude aparente e  $M$  a magnitude absoluta de uma estrela,

$$m - M = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_m}{F_M}\right) \Rightarrow m - M = -2,5 \cdot \log\left(\frac{\frac{\mathcal{L}}{4\pi d^2}}{\frac{\mathcal{L}}{4\pi 10^2}}\right) \Rightarrow m - M = 5 \cdot \log\left(\frac{d}{10}\right)$$

Desenvolvendo o logaritmo, é possível denotar da seguinte forma:

$$m - M = 5 \cdot \log d - 5$$

Observe que, em ambos os casos,  $d$  se encontra em parsecs.



## 7.4 Magnitude bolométrica

Todos nós, a olho nu, observamos o céu na faixa do visível. Porém, o brilho de alguns astros são mais intensos em determinadas bandas. Estrelas da classe espectral O, de altíssimas temperaturas, como a Mintaka ( $\sigma$  Ori), têm seu brilho predominante na banda B (Blue). Já o Sol, tem o brilho predominante na banda V (Visible). Entretanto, a magnitude bolométrica, diferentemente do índice de cor, não leva em conta faixas de comprimentos de onda específicas. Ela está relacionada ao espectro eletromagnético inteiro.

Dessa forma, o fluxo bolométrico será maior que o fluxo visual. E em relação à magnitude, é necessário utilizar um coeficiente de correção, chamado de **correção bolométrica** (BC).

$$m_{BOL} = m_v - |BC| ; M_{BOL} = M_v - |BC|. \text{ Sabendo que, sempre, } m_v > m_{BOL}.$$

Geralmente, a correção bolométrica é encontrada utilizando um gráfico como esse que está abaixo. Além disso, perceba a dependência da temperatura.

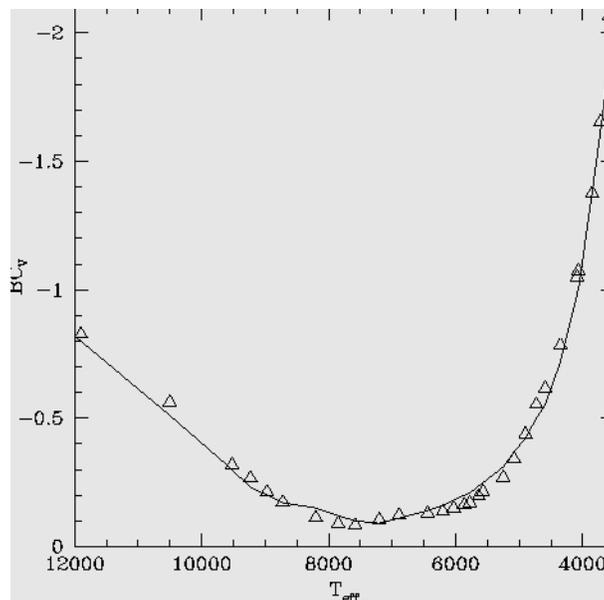


Figura 5: Temperatura vs Correção bolométrica

## 7.5 Magnitude combinada

Alguns astros estão tão próximos um dos outros que não conseguimos distinguir seus fluxos, pelo menos de primeira. O que observamos é o fluxo combinado, ou seja, a soma dos fluxos aparentes.

As magnitudes não podem ser, simplesmente, somadas e dizer que o resultado é a magnitude combinada, como  $m_1 + m_2 = m_c$ ; ela depende do logaritmo dos fluxos, portanto é uma escala logarítmica. Por outro lado, os fluxos podem sim ser somados trivialmente, uma vez que são escalas lineares. Nesse sentido, deixo a cargo de quem lê, deduzi-la.

## 7.6 Magnitude limite para telescópios

Um telescópio, além de permitir que vejamos longe, permite também que vejamos objetos que a olho nu não se consegue, por conta da abertura máxima de nossa pupila. Nesse sentido, analisemos



matematicamente isso.

Sabendo que  $F \propto \frac{1}{A}$ :

$$\frac{F'}{4\pi d^2} = \frac{F}{\pi R^2} \Rightarrow F' = \frac{L}{\pi R^2}$$

Sendo,  $F'$  e  $R$ , respectivamente, o fluxo recebido em um círculo (que representa a área da lente objetiva/espelho primário de um telescópio) e o raio desse círculo. Utilizando  $m = -2,5 \cdot \log(F) + C$  e considerando  $m_T$  a magnitude limite de um telescópio:

$$m_T = -2,5(\log L - \log \pi R^2) + C$$

$$m_T = -2,5(\log L - \log \pi - \log R^2) + C$$

$$m_T = -2,5 \log L + 2,5 \log R^2 + 2,5 \cdot \log \pi + C \Rightarrow 2,5 \cdot \log \pi + C = C'$$

$$m_T = -2,5 \log L + 2,5 \log R^2 + C'$$

Comparando-o com um segundo telescópio,

$$m_{T1} - m_{T2} = \cancel{-2,5 \log L} + 2,5 \log R_1^2 + \cancel{C'} - \cancel{2,5 \log L} - 2,5 \log R_2^2 - \cancel{C'}$$

$$m_{T1} = m_{T2} + 2,5 \log \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \Rightarrow \frac{2R_1}{2R_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$m_{T1} = m_{T2} + 5 \log \left( \frac{D_1}{D_2} \right)$$

Sabendo que a abertura da pupila humana mede 6 mm e sua magnitude limite, +6,

$$m_T = 6 + 5(\log D - \log 6)$$

$$m_T = 6 - 5 \log 6 + 5 \log D$$

$$m_T = 2,1 + 5 \log D^{(mm)}$$

## 8. Contagens de Fótons

---

É muito comum, em problemas da seletiva de astronomia, além de calcularmos a luminosidade e/ou fluxo, estimarmos quantos fótons há em um pulso, quantos chegam a um olho humano ou a um telescópio. Para ilustrar isso, solucionarei um problema desse (tente fazer também!):



(FUVEST-Adaptado) Lasers pulsados de altíssima potência estão sendo construídos na Europa. Esses lasers emitirão pulsos verdes ( $\nu_{verde} = 6 \cdot 10^{14}$  Hz), e cada pulso terá  $10^{15}$  W de potência e duração de cerca de  $3 \cdot 10^{-14}$  s. Com base nestas informações, determine o número  $N$  de fótons em cada pulso.

## SOLUÇÃO

Sabendo a potência luminosa  $P$  é a quantidade de emissão de energia em um determinado tempo:

$$P = \frac{E}{\Delta t} \Rightarrow P\Delta t = E = 10^{15} \cdot 3 \cdot 10^{-14} = 30 \text{ J}$$

Sabendo que a energia do fóton é dada por  $E_f = h\nu$ , onde  $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}$ :

$$E = N \cdot E_f \Rightarrow N = \frac{E}{E_f} = \frac{30}{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 6 \cdot 10^{14}} \approx 7,55 \cdot 10^{19} \text{ fótons}$$

## 9. Deduções

### 9.1 Lei de Wien

Para simplificar o desenvolvimento,  $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ . Substituindo isso e reorganizando a lei de Planck:  $B_\lambda = 2hc^2 \cdot \lambda^{-5} \cdot (e^x - 1)^{-1}$

Como estamos à procura de um máximo, basta derivar a função e igualá-la a 0, já que no máximo não há taxa de variação.

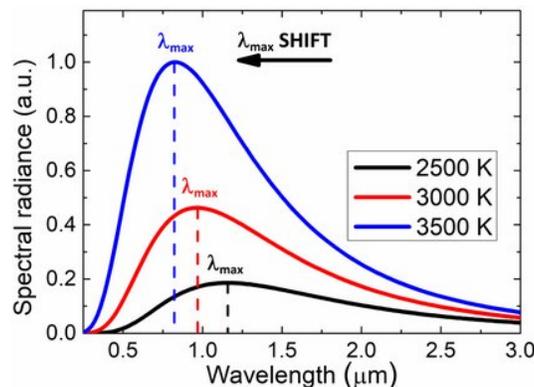


Figura 6: Lei do deslocamento de Wien



$$\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{d(2hc^2 \cdot \lambda^{-5} \cdot (e^x - 1)^{-1})}{d\lambda} = 0$$

$$2hc^2 \left( -5\lambda^{-6} \cdot (e^x - 1)^{-1} + \lambda^{-5} \cdot -(e^x - 1)^{-2} \cdot e^x \cdot -\frac{hc\lambda^{-2}}{kT} \right) = 0$$

$$5\lambda^{-6} \cdot (e^x - 1)^{-1} = \lambda^{-5} \cdot (e^x - 1)^{-2} \cdot e^x \cdot \frac{hc\lambda^{-2}}{kT}$$

$$e^x \cdot (e^x - 1)^{-1} \cdot \frac{hc}{\lambda kT} = 5$$

$$e^x \cdot (e^x - 1)^{-1} \cdot x = 5$$

$$\frac{5(e^x - 1)}{e^x} = x$$

$$5 \cdot (1 - e^{-x}) = x$$

Resolvendo por iteração,  $x \approx 4,964$ . Como  $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ ,

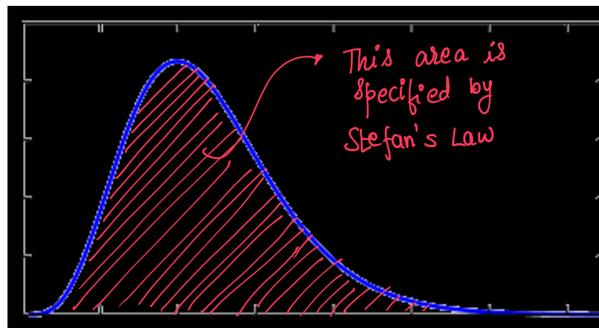
$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{kx} \Rightarrow \lambda_{max} T \approx 2,899 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$$

## 9.2 Lei de Stefan-Boltzmann

Pela função zeta de Riemann:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \Rightarrow \zeta(4) \cdot \Gamma(4) = \int_0^\infty \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^4}{15}$$

Como o fluxo é a integração da intensidade específica em todos os comprimentos de onda e também, em toda a área da “esfera de luz”, basta integrar a Lei de Planck.



$$F = \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T) d\lambda \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)d\theta$$

$$F = \pi \cdot \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T) d\lambda$$

$$F = \pi \cdot \int_0^{\infty} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^x - 1} d\lambda$$

Sabe-se que:

$$x = \frac{hc}{\lambda kT} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{xkT} ; \frac{dx}{d\lambda} = -\frac{hc}{kT\lambda^2} \Rightarrow d\lambda = -\frac{kT\lambda^2}{hc} dx$$

Então,

$$F = \pi \int_0^{\infty} -\frac{2kcT}{\lambda^3} \frac{1}{e^x - 1} dx$$

$$F = \pi \int_0^{\infty} -\frac{2k^4T^4}{h^3c^2} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$F = \frac{2\pi k^4T^4}{h^3c^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$F = \frac{2\pi k^4T^4}{h^3c^2} \frac{\pi^4}{15}$$

$$F = \frac{2\pi^5k^4}{15h^3c^2} \cdot T^4$$

$$F = \sigma T^4$$

## 10. Exercícios

---

**Problema 1.** (Seletiva Online)\*\* Considere três estrelas, que vamos denominar de  $A$ ,  $B$  e  $C$  e que satisfazem as seguintes condições:

- a estrela  $A$ , vista da estrela  $B$ , está no limite da visibilidade do olho nu
- a estrela  $B$ , vista da estrela  $C$ , está no limite da visibilidade do olho nu
- a estrela  $C$ , vista da estrela  $A$ , está no limite da visibilidade do olho nu



Chamemos as distâncias entre as estrelas  $A$  e  $B$  de  $d_1$ , entre  $B$  e  $C$  de  $d_2$  e entre  $C$  e  $A$  de  $d_3$ . Considere que as magnitudes absolutas de  $A$  e  $B$  sejam, respectivamente,  $M_A = 2,0$  e  $M_B = 3,0$  e que o limite de visibilidade de uma estrela para o olho nu seja  $m \leq 6,0$ .

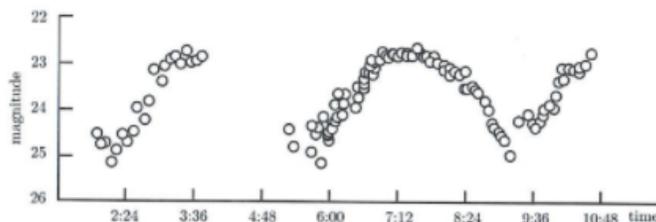
Marque a opção que traz a magnitude absoluta  $M_C$  da estrela  $C$  que satisfaz as condições acima para a sua luminosidade máxima.

- a) 2,4
- b) 5,0
- c) 0,9
- d) 4,2

**Problema 2.** (Seletiva Online)\* Duas estrelas de mesmo tipo espectral e mesma magnitude absoluta possuem magnitudes aparentes  $m_1 = 17$  e  $m_2 = 12$ , respectivamente. Se a primeira estrela está a 1 kpc de distância de nós, a que distância de nós está a outra estrela?

- a) 10 kpc
- b) 100 pc
- c) 50 pc
- d) 100 kpc

**Problema 3.** (Seletiva Online)\* Em 19 de outubro de 2017 o telescópio Pan-STARRS, no Havaí, descobriu o primeiro objeto interestelar dentro do Sistema Solar. Ele recebeu o nome de ‘Oumuamua’, que significa “o mensageiro do passado”. Sua curva de luz (magnitude em função do tempo) foi medida no dia 29 de outubro do mesmo ano e é mostrada na figura a seguir.



Considere que o Oumuamua seja um elipsoide, que lembra uma bola de futebol americano, como ilustrado na figura abaixo, cujo eixo de rotação está ao longo do semieixo menor  $b$ , perpendicular à linha de visada.



Considere que neste dia, devido à rotação, a amplitude da variação de magnitude do objeto foi de  $\Delta m = 2,5 \text{ mag}$ .

Com essa informação, marque a opção que traz a razão entre os semieixos  $a$  e  $b$  do Oumuamua, ou seja, o valor de  $a/b$ .

- a) 5
- b) 3,5
- c) 10
- d) 2,5

**Problema 4.** (USAAAO)\* The spectrum of a blackbody peaks at a wavelength inversely proportional to its temperature. This is known as Wein's law and is used to estimate stellar temperatures. The sun can be approximated as a blackbody with its peak wavelength in the visible portion of the spectrum and a surface temperature of  $6000 \text{ K}$ . Given this data, estimate the peak wavelength of a human being, assuming it to be a black body.

- a)  $10 \text{ nm}$
- b)  $10 \mu\text{m}$
- c)  $10 \text{ mm}$
- d)  $10 \text{ m}$

**Problema 5.** (IOAA)\* Luminous Blue Variable (LBV) stars greatly vary in visual brightness; however, their bolometric magnitude remains constant. Imagine a LBV star with a black body temperature of  $5000 \text{ K}$  at its maximum visual brightness and  $30,000 \text{ K}$  at its minimum visual brightness. Calculate the ratio of the star radius between both situations above.

**Problema 6.** (Vinhedo)\*\* Certa noite, Vreno decidiu montar seu telescópio, cujo diâmetro é  $D = 10 \text{ cm}$ , para tentar observar um sistema triplo, cujas estrelas têm magnitudes aparentes de 12.5, 11.0 e 13.0. Sabendo disso, calcule a magnitude aparente do sistema triplo.

**Problema 7.** \*\*\*Deduz a lei de Wien.

**Problema 8.** \*\*\*Deduz a lei de Stefan-Boltzmann.



## 11. Gabarito

---

Problema 1. c) 0,9

Problema 2. b) 100 pc

Problema 3. c) 10

Problema 4. b)  $10 \mu m$

Problema 5. 36

Problema 6. 10.63

