Leis de Kepler

Jan Bojan Ratier - Projeto Olímpicos

Introdução

Todos nós aprendemos na escola que o sistema solar é composto pelo Sol, 8 planetas (Plutão estará para sempre em nossos corações ☹) e mais alguns corpos que não vem ao caso. Mas, sabendo que esses objetos se movem, você já se perguntou como eles fazem isso? Pois é, foi exatamente isso que o matemático alemão *Johannes Kepler* (1571 - 1630) se perguntou e é exatamente isso que veremos hoje.

História das leis de Kepler

Caso você esteja com pressa pode pular essa parte a vontade :D (deu um trabalhão pra fazer pula não pfvr)

– *Tycho Brahe*

Antes de falarmos do Kepler propriamente dito, temos que passar um pouco pela vida do dinamarquês *Tycho Brahe* ($1546-1601$). Esse sujeito foi um grande observador do céu, que decidiu fazer o que fez após perceber que os dados de posição dos planetas da época não eram nada precisos quando as previsões de uma grande aproximação de Júpiter e Saturno no céu estavam errados em quase um mês! Percebendo o potencial de Tycho, o rei da Dinamarca *Frederico II* ofereceu uma ilha e dinheiro para que Tycho construísse um observatório para realizar suas observações. Feliz da vida, Tycho ficou rico e passou a vida alegremente olhando os astros em seu castelo na Dinamarca.

Infelizmente, isso não aconteceu. Após a morte do rei Frederico II, em 1588, o seu sucessor expulsou o pobre Tycho da Dinamarca porque não gostava do sujeito. Felizmente, nosso amigo Tycho foi convidado pelo imperador da Boêmia a ser astrônomo da corte do imperador. Contente com seu novo cargo mas preocupado com a utilidade de seus dados, o Dinamarquês contratou o nosso outro amigo, Johannes Kepler, habilidoso matemático alemão que faria o tratamento dos dados obtidos por Tycho. Um ano depois dessa contratação, Tycho veio a falecer e Kepler herdou os dados obtidos e pode realizar a descoberta dessas novas leis que mudaram a astronomia.

– *Johannes Kepler*

Munido dos dados "precisos" de Tycho, Kepler sentou a bunda na cadeira e começou a se divertir no mundo dos números. Como o sistema Geocentrista não se ajustava muito bem nos dados obtidos, Kepler, que conhecera a teoria Heliocêntrica anteriormente, tentou ajustar os dados para órbitas circulares ao redor do sol. Com a Terra esse sistema conseguiu se ajustar bem, mas com um detalhe: o Sol não estava no centro do círculo. Após traçar a órbita terrestre, o Alemão tentou traçar a órbita de Marte, que era o planeta em que se observava a maior quantidade de dados.

Porém, após anos de muitas tentativas, Kepler percebeu que o círculo não se ajustava para a órbita do planeta vermelho e, após muitos outros anos, tentou traçar o caminho com uma elipse e, para a surpresa e felicidade de nosso amiguinho, funcionou perfeitamente bem! Percebendo o que aconteceu com Marte, Kepler entendeu o porquê do sol não estar no centro da órbita terrestre. Isso porque a órbita terrestre não era um círculo, mas sim uma elipse com excentricidade muito próxima de 0, como veremos adiante.

Após essa descoberta, Kepler, munido de princípios e teoremas matemáticos, passou um bom tempo estudando esses movimentos, formulando as famosas 3 leis que levam o seu nome e trazendo inúmeras contribuições à astronomia.

Agora chega dessa baboseira e vamos para a matemática que o nosso amigo Kepler desenvolveu :D

Elementos da elipse

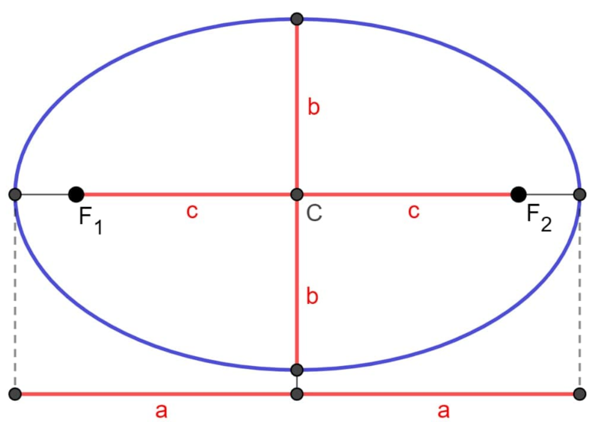
Antes de falarmos das leis de Kepler, temos que dar uma passadinha em alguns elementos da elipse, prometo que essa é a última coisa antes das leis!

Uma elipse é um "círculo esticadinho" em que notamos a existência de dois eixos principais: o eixo maior e o eixo menor. O eixo maior é a maior distância entre dois pontos da elipse que passa pelo centro dela. O eixo menor é a mesma coisa porém sendo a menor distância. Um semi-eixo maior é metade do eixo maior e é representado pela letra "a". Um semi-eixo menor é metade do eixo menor e é representado pela letra "b".

No semi-eixo maior notamos a existência de dois pontos importantes: os focos. A posição dos focos define o quão "esticadinha" será a elipse.

Outro segmento de reta importante é o que chamamos de "c". Esse segmento é a distância entre um dos focos até o centro da elipse.

Veja esses elementos na imagem a seguir:



Desses elementos podemos definir uma propriedade muito interessante chamada de *excentricidade*. A excentricidade de uma elipse é definida como:

$$e = \frac{c}{a}$$

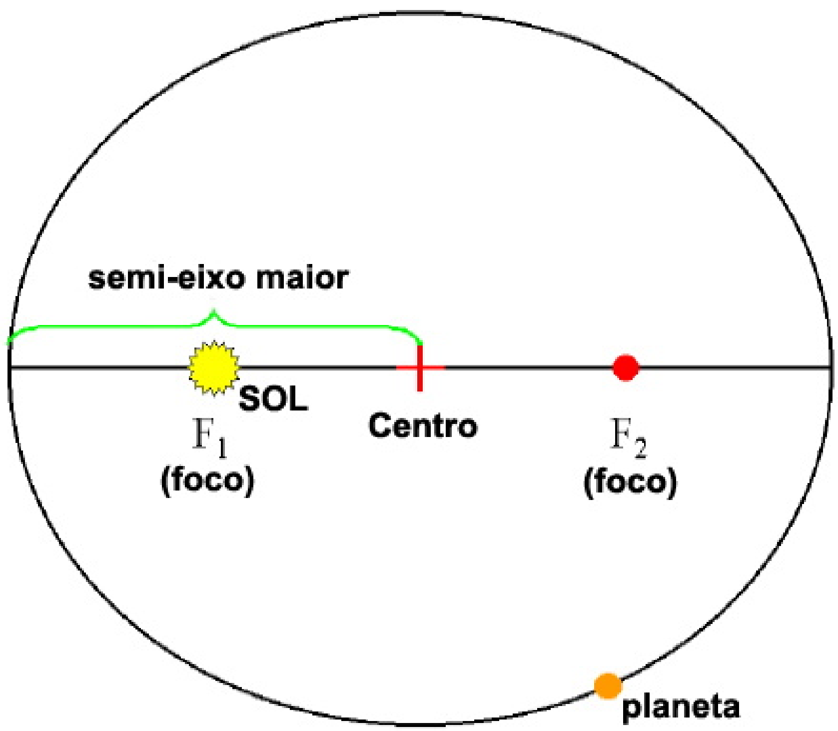
A excentricidade de uma elipse está sempre entre 0 e 1, mas ela não é restrita a esse intervalo. Uma cônica de excentricidade 0 é um círculo, uma elipse está entre 0 e 1, uma parábola tem excentricidade 1 e uma hipérbole tem excentricidade maior que 1.
Outra coisa que é bastante útil é saber calcular a área de uma elipse. Ela é dada por $A_{elipse} = \pi ab$

Isso que tratamos aqui foi apenas o básico para a compreensão das Leis de Kepler a seguir. Caso esteja interessado em saber mais sobre esse mundo incrível das cônicas, aqui está uma aula maravilhosa do nosso amigo Otávio que nos mostra muito mais sobre essas fascinantes formas e suas propriedades! Não deixe de voltar aqui quando terminar a leitura dessa aula se não o bicho papão não vai ter dó de você! Cônicas e Órbitas

1. Primeira lei de Kepler

Como visto por Kepler após seus anos de ajuste às órbitas dos planetas, estes corpos não descrevem órbitas circulares, mas sim elípticas com o sol em um dos seus focos!

Dito isso podemos definir dois pontos importantes em uma órbita elíptica: o apoastro e o periastro (ou afélio e periélio no caso do sol ocupar o foco ou apogeu e perigeu no caso da Terra ocupar o foco). O afélio é o ponto mais afastado do sol e o periélio é o ponto mais próximo do sol na trajetória elíptica.



Se quisermos calcular a distância do planeta ao sol em um determinado momento podemos usar essa fórmula aqui:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+ecos\theta}$$

Caso queira saber de onde essa fórmula vem, dê uma olhadinha nessa aula aqui: Cônicas e Órbitas 😉

Um ponto que devemos prestar atenção é o de que a órbita dos planetas são elipses de baixíssima excentricidade (na maioria dos casos), o que significa que elas mais se parecem com um círculo do que com uma elipse, mas não se engane! Elas são ELIPSES. Caso queira saber mais sobre esse assunto, aqui está um artigo do Coordenador da OBA, João Batista Garcia Canalle, a respeito de uma questão da OBA que gerou polêmica entre os professores e alunos: O Problema do Ensino da Órbita da Terra.

Outro ponto importante é que essa lei rege o movimento dos planetas, porém um corpo pode ter outros formatos de órbita se tiver uma determinada distância e velocidade de um objeto com determinada massa. Além da elipse então, podemos ter órbitas circulares, parabólicas e hiperbólicas. Perceba então, que a órbita de algum objeto em torno de algo é uma cônica!

Para:

- **$e = 0$:** a órbita é um círculo.
- **$0 < e < 1$:** a órbita é uma elipse.
- **$e = 1$:** a órbita é uma parábola.
- **$e > 1$:** a órbita é uma hipérbole.

Uma órbita circular ou elíptica é chamada de *órbita fechada* e uma órbita parabólica ou hiperbólica é chamada de *órbita aberta*.

Caso deseje saber mais sobre a energia e a velocidade em diferentes tipos de órbitas, aqui está novamente a recomendação da aula do Otávio sobre Cônicas e Órbitas!

2. Segunda lei de Kepler

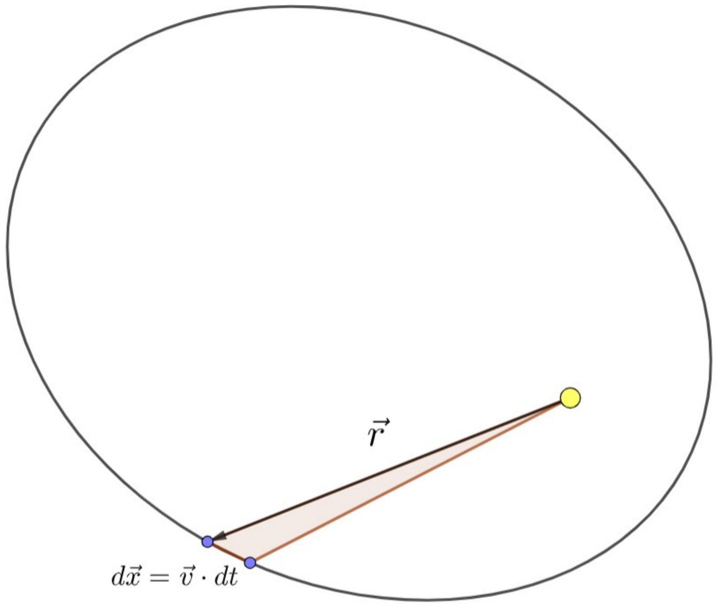
A Segunda lei de Kepler, ou lei das Áreas nos diz que uma reta ligando o planeta até o sol percorre áreas iguais em tempos iguais, ou seja, a velocidade AREAL (ou areolar) do planeta é constante! Esse princípio é muito útil para descobrirmos períodos de tempo de alguma parte do trajeto 😊

Uma das consequências desta lei é a de que a velocidade, em uma órbita elíptica, não é constante, ela aumenta quanto mais próximo do foco principal (onde se localiza o sol) e diminui quanto mais longe do sol.

Traduzindo matematicamente temos o seguinte:

$$\frac{A_1}{t_1} = \frac{A_2}{t_2} = \frac{dA}{dt} = V_{areal} = constante$$

Podemos deduzir essa lei a partir de uma aproximação sagaz:



Quando dt é muito pequeno, podemos aproximar essa figura para um triângulo com altura $\vec{r}$ e base $d\vec{x} = \vec{v} \cdot dt$, com isso, temos que a área dA desse triângulo é equivalente a:

$$dA = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}|}{2} dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times \vec{v}|$$

Multiplicando o segundo membro por $\frac{m}{m}$ temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} \cdot m \cdot |\vec{r} \times \vec{v}|$$

Como o *momento angular* L do corpo é dado por $m \cdot |\vec{r} \times \vec{v}|$, então temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Como o momento angular de um corpo é constante e sua massa também é, chegamos a conclusão que $\frac{dA}{dt}$ também é constante, do jeito que queríamos chegar.

"Mas pera aí" - você pode se perguntar, *"por que esse tal de momento angular é constante?"*, e essa é uma ótima pergunta!

A resposta para esse questionamento é bem simples na verdade. A questão é que temos que levar em consideração uma coisinha chamada *torque*. O *torque* é, por definição, a variação do *momento* *angular* com o tempo! E, numa órbita, o *torque* é 0. Isso porque o torque T de uma órbita é igual à $\vec{T} = \vec{F} \times \vec{r}$ que, por produto vetorial é igual à $\vec{T} = \hat{n} \cdot F \cdot r \cdot sen\theta$. Como a única força significativa que age sob um planeta é a da gravidade, o vetor $\vec{F}$ e o vetor $\vec{r}$ fazem um ângulo de 180 graus entre eles e, como o seno de 180 é 0 então o torque é 0 também! E se o torque é 0, então o *momento angular* não varia com o tempo e, se ele não varia, ele é constante!

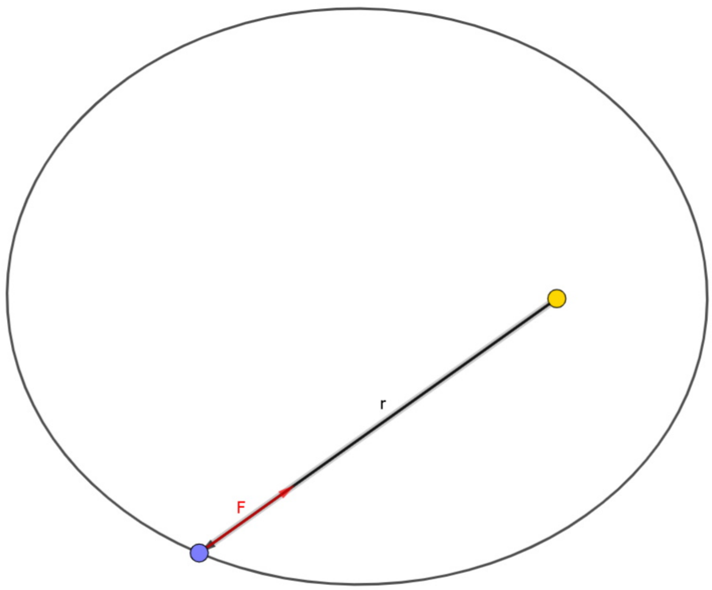


Figura 1: O vetor $\vec{F}$ e $\vec{r}$ fazem 180 graus entre si

Algo que é importante de citar é que a fórmula $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{L}{2m}$ que encontramos é bastante útil! Com ela é possível descobrir a área percorrida por um intervalo de tempo ou o contrário!

3. Terceira lei de Kepler

A Terceira lei de Kepler é uma das mais úteis de todas, com ela podemos descobrir muitas propriedades de um corpo orbitante! Essa lei descreve que a razão entre o quadrado do período com o cubo do semieixo maior da órbita é sempre constante para um determinado sistema de objetos orbitantes, ou seja:

$$\frac{P^2}{a^3} = k$$

Esse k varia de sistema para sistema, variando conforme a massa do corpo central. Mais tarde, nosso amiguinho bem conhecido newton encontrou uma fórmula para calcular k! É essa aqui:

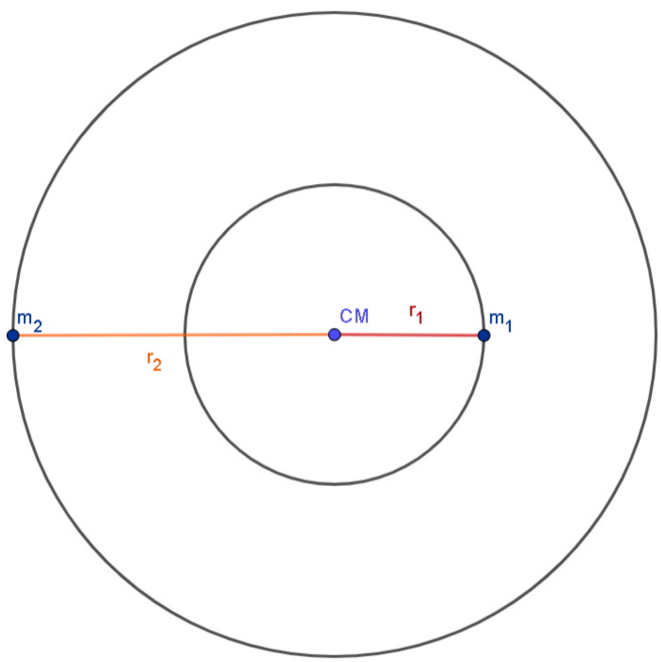
$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Algo que é muito útil ao utilizar a terceira lei deduzida por newton é que quando as unidades utilizadas são UA, ano e massas solares, a fórmula assume a seguinte forma:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{M}$$

Lembrando que M é a soma da massa dos corpos, portanto quando temos dois corpos temos que $M = m_1 + m_2$, mas quando $m_1 >> m_2$ podemos desprezar o m_2 (tadinho ☹) e assumir que M na lei é só o m_1.

Para deduzir essa lei, podemos considerar dois corpos que, com uma boa aproximação, orbitam circularmente em torno do centro de massa do sistema.



Para tal usaremos as seguintes fórmulas:

- $F_{grav} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
- $F_{cen} = m\frac{v^2}{r}$
- $v = \frac{2\pi r}{P}$
- $m_1r_1 = m_2r_2$
- $r = r_1 + r_2$

Começaremos então igualando a força gravitacional e a centrípeta, usando o corpo 1 como referência na centrípeta, obtendo assim:

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1\frac{v_1^2}{r_1}$$

$$\frac{Gm_2}{r^2} = \frac{v_1^2}{r_1}$$

Agora, substituiremos a velocidade pela sua fórmula:

$$\frac{Gm_2}{r^2} = \frac{\frac{(2\pi r_1)^2}{P^2}}{r_1}$$

$$\frac{Gm_2}{r^2} = \frac{4\pi^2 r_1^2}{P^2 r_1}$$

$$\frac{Gm_2}{r^2} = \frac{4\pi^2 r_1}{P^2}$$

Vamos deixar esse último um pouco de lado e mexer em outra fórmula. Sabemos que $m_1r_1 = m_2r_2$. Além disso também temos que se $r = r_1+r_2$, então $r_2 = r-r_1$. Com isso podemos encontrar uma relação muito útil:

$$m_1r_1 = m_2r_2$$

$$m_1r_1 = m_2r - m_2r_1$$

$$m_1r_1 + m_2r_1 = m_2r$$

$$r_1(m_1 + m_2) = m_2r$$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}r$$

Agora podemos substituir essa relação no r_1 do segundo membro de onde paramos:

$$\frac{Gm_2}{r^2} = \frac{4\pi^2}{P^2}\frac{m_2}{m_1 + m_2}r$$

$$\frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Justamente onde queríamos chegar :D

Você pode encontrar essa dedução e outras aulas sobre astronomia para a OBA no canal do youtube do nosso amigo Bismark Mesquita!

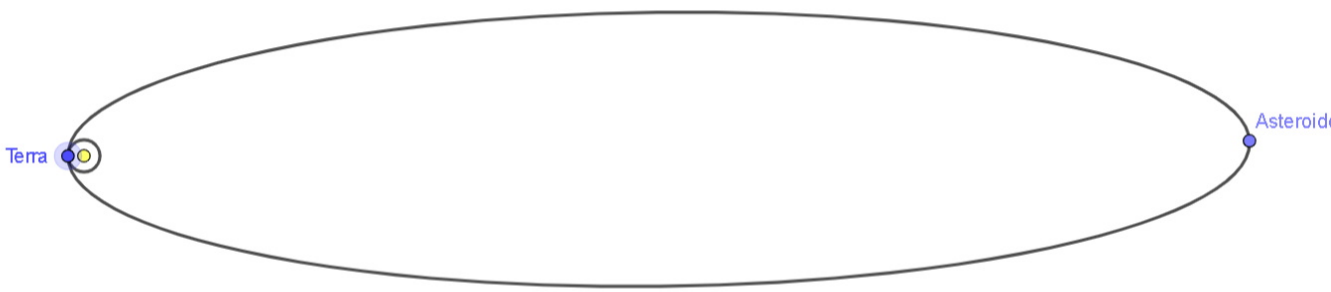
Observação: r equivale ao a, usamos r nessa dedução porque simplificamos a trajetória para um círculo ☺

4. Problemas

Aqui estão alguns problemas para você, jovem estudante, exercitar o que foi aprendido hoje!

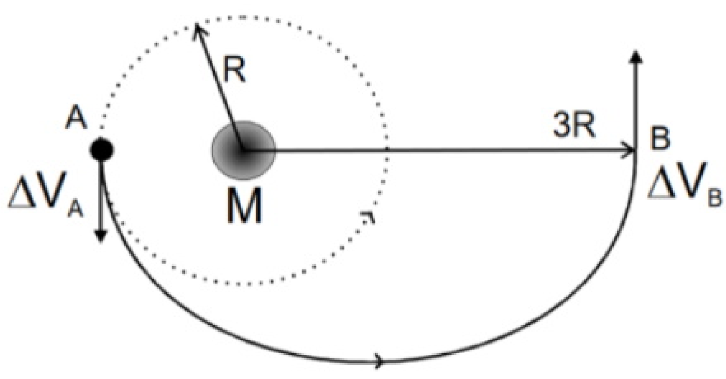
Problema 1. Quantos anos um asteroide leva para dar uma volta completa ao redor do sol sabendo que o seu semi-eixo maior mede 5,38UA?

Problema 2. Minha nossa senhora! Foi detectado um asteroide do *Cinturão de Oort* que pode colidir com a Terra! Os cientistas estão tão apavorados que nem conseguem descobrir se ele colidirá ou não com a Terra! Nos ajude a determinar se o asteroide colidirá ou não com a Terra em sua próxima passagem periféfica! As características orbitais que os cientistas conseguiram descobrir antes de entrarem em estado de choque foram essas: Seu afélio é de $20000UA$ e seu periélio é de $1UA$. O esquema atual de órbitas é esse:



Por favor nos ajude, você é nossa última esperança!

Problema 3. (Seletiva de astronomia 2021) Uma espaçonave está orbitando um planeta de massa M em uma órbita circular de raio R. Para deixar este planeta, os engenheiros espaciais decidem aplicar dois impulsos. O primeiro impulso ΔV_A será aplicado no ponto A, na mesma direção do movimento para que a nave faça uma transferência elíptica e alcance o ponto B. Uma vez em B, um segundo impulso ΔV_B será aplicado novamente na mesma direção de movimento para a espaçonave escapar do sistema.



Determine o tempo que a nave levará para ir do ponto A ao ponto B.

Problema 4. (Seletiva de astronomia 2019) Um cometa orbita o Sol e as distâncias máxima e mínima do cometa ao Sol valem:

$$r_{max} = 31{,}5UA \text{ e } r_{min} = 0{,}5UA$$

a) Calcule o período orbital deste cometa (T_{cometa});

b) Calcule a área varrida pelo raio vetor do cometa por unidade de tempo (Ω = velocidade areal do cometa). Expresse em unidades de $(UA)^2/\text{ano}$;

c) Determine a excentricidade da órbita do cometa.

Dica: para a "b" busque algum modo de relacionar os parâmetros a, b, c da elipse, use a propriedade de que a soma das distâncias de um ponto na elipse até os dois focos é sempre igual ao eixo maior. Busque ver o que acontece com cada distância quando o cometa está passando pela interseção da elipse com o eixo menor.

Problema 5. (Seletiva de astronomia 2014) Uma sonda lançada para Marte tem periélio e afélio sobre as órbitas da Terra e Marte respectivamente. Esse tipo de órbita é denominada ÓRBITA DE MÍNIMA ENERGIA, ou ÓRBITA DE TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN, nome dado em homenagem ao engenheiro alemão Walter Hohmann (1880-1945), que propôs a manobra em 1925. A sonda parte da órbita Terrestre a alcança Marte quando chega a seu afélio. Durante o percurso é afetada apenas pela força gravitacional do Sol. As órbitas da Terra e Marte são consideradas coplanares.

a) Determine o semieixo maior e a excentricidade da órbita de transferência, sabendo que os raios das órbitas da Terra e de Marte, supostas circulares, são, respectivamente, $R_T = 1UA$ e $R_M = 1{,}5UA$

b) Calcule a diferença de velocidade necessária para que a sonda percorra a trajetória desejada a partir de uma órbita circular de raio igual ao raio da órbita da Terra. Assuma $M_{sol} = 2 \cdot 10^{30} kg$, $1UA = 1{,}5 \cdot 10^{11} m$ e $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^2$

c) Calcule o tempo de viagem entre a Terra e Marte.

Dica: a velocidade em uma órbita elíptica é dada pela equação $v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$ em que $\mu = GM$

Problema 6. (Seletiva de astronomia 2020) A Grande Mancha Vermelha (GMV) é um enorme anticiclone da atmosfera de Júpiter localizado na latitude 22 S. De forma oval e coloração em tons de vermelho, é a maior tempestade existente no Sistema Solar. Seu tamanho já foi grande o suficiente (de leste a oeste) para abranger mais de duas vezes o diâmetro da Terra. Com o passar do tempo, no entanto, seu tamanho sofreu uma redução e em 2014 imagens captadas pelo Telescópio Espacial Hubble mostraram que em sua largura (pouco menos de 16100 km de diâmetro) só poderia caber uma vez o tamanho da Terra.

Para entender o que está acontecendo, uma agência espacial quer desenvolver uma sonda que irá estudar com detalhes a evolução dinâmica da GMV. Para isso, esta sonda precisará entrar em órbita de Júpiter e ficar estacionária sobre a Mancha. A que altura, aproximadamente, a partir do topo da atmosfera de Júpiter, deverá ficar esta sonda junoestacionária?

Dados: massa de Júpiter $M_J = 1{,}90 \cdot 10^{27} kg$; raio de Júpiter $R_J = 7{,}49 \cdot 10^6 m$; período de rotação médio de Júpiter em torno do seu eixo $P_J = 9{,}90$ horas; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^2$

5. Gabarito

Problema 1. $12{,}5 anos$

Problema 2. Não colidirá, ainda bem! Quando o asteroide estiver passando a 1UA de distância do sol, a Terra estará do outro lado da órbita!

Problema 3. $2\sqrt{2}\frac{\pi R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$

Problema 4. a) 64 anos

b) $3{,}12(UA)^2$/ano

c) $e = 0{,}969$

Problema 5. a) $a = 1{,}25UA$ e $e = 0{,}2$

b) $2{,}85km/s$

c) $255dias$

Problema 6. $h \approx 1{,}53 \cdot 10^8 m$