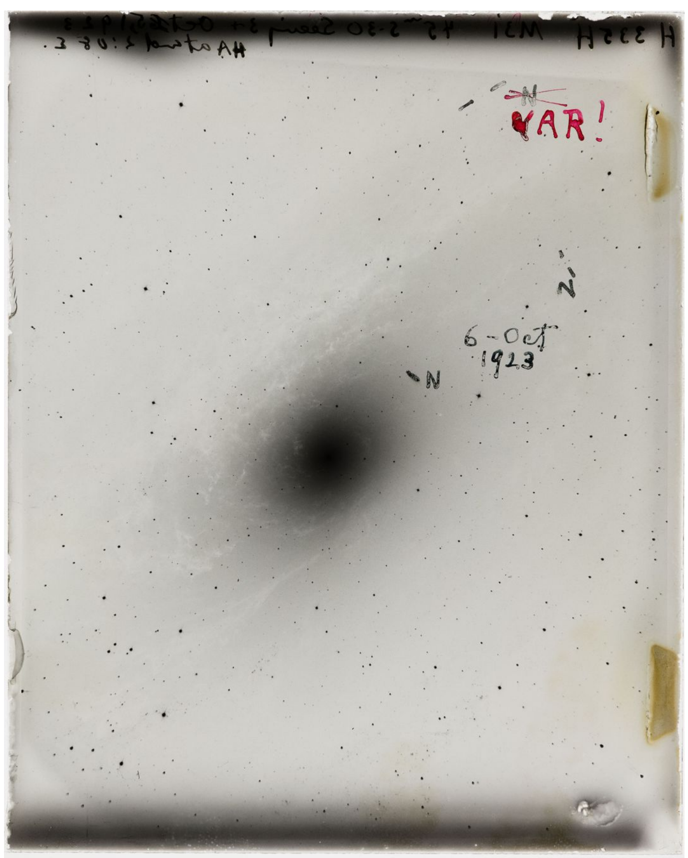
Redshift e Lei de Hubble

Otávio Casagrande Ferrari - Projeto Olímpicos

1. Introdução

No século XVIII, alguns objetos celestes difusos que podiam ser observados a olho nu ficaram bastante conhecidos como nebulosas. Em 1755, o filósofo Immanuel Kant sugeriu que as nebulosas seriam sistemas estelares como a Via Láctea; introduzindo assim a noção de "Universos-Ilha". Em 1789, o astrônomo William Herschel, o maior construtor de telescópios da época, publicou um catálogo com mais de mil nebulosas. Por mais de dois séculos permaneceu em aberto a questão da localidade das nebulosas. Em outras palavras, seria a Via Láctea todo o Universo incluindo as nebulosas, ou as nebulosas seriam os kantianos "Universos-Ilha"? Essa questão foi analisada no que ficaria conhecido como "O Grande Debate" entre os astrônomos Harlow Shapley e Heber Curtis, realizado em 1920 na sede da Academia de Ciências Americana (Washington). O debate terminou inconclusivo devido à dificuldade de se medir grandes distâncias em Astronomia.



Porém, nas noites dos dias 5-6 de Outubro, 1923, o astrônomo Edwin Hubble tirou uma foto da galáxia de Andrômeda (Messier 31) usando uma placa fotográfica com o telescópio de 100 polegadas do Observatório Monte Wilson. Na imagem acima da famosa placa que mudou nossa concepção do universo, o "N" que foi riscado e substituído por "VAR!" indica que Hubble originalmente pensou que um objeto era uma nova, mas depois percebeu que na verdade era uma estrela variavél Cefeida. Como essas estrelas possuem uma relação período-luminosidade, ao analisar o período de pulsação dela, Hubble estava apto a calcular a distância até Andrômeda, revelando que na realidade ela era uma galáxia separada da nossa.

Com isso, Hubble fundou uma nova área do conhecimento: a Astronomia Extragaláctica. A verdadeira cosmologia observacional dava seus primeiros passos. Em 1929, utilizando medidas de velocidade e distância para uma amostra de galáxias, Hubble descobriu a expansão do Universo.

Aqui, iremos entender como Hubble calculou a velocidade dessas galáxias através do chamado *redshift* e também entenderemos qual foi a conclusão dele para descobrir a expansão do universo, a Lei de Hubble.

2. Efeito Doppler

O Efeito Doppler é um fenômeno físico observado na mudança da frequência de ondas quando emitidas ou refletidas por um objeto que está em movimento com relação ao observador. Provavelmente, você já deve ter se deparado com o efeito doppler para ondas mecânicas (como o som), porém aqui iremos estudar o efeito doppler para ondas eletromagnéticas (como a luz visível), que é levemente diferente. Essa diferença se deve ao fato de que a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas independe da velocidade do meio em que se propagam, diferentemente das ondas mecânicas.

Além disso, outra diferença que surge é considerarmos efeitos relativísticos, uma vez que muitos corpos astronômicos movem-se a velocidades razoavelmente próximas à da luz.

Por isso, antes de introduzir o efeito doppler relativístico, vamos recordar a dilatação do tempo em referenciais inercias.

2.1 Dilatação do tempo

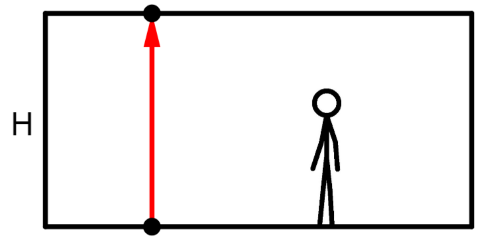
A teoria da relatividade restrita de Albert Einstein baseia-se em dois postulados:

- **O Princípio da Relatividade:** as leis da física são as mesmas para todos os referenciais inerciais.
- **A Constância da Velocidade da Luz:** a luz se move pelo vácuo a uma velocidade constante c independentemente do movimento da fonte de luz. (Esse postulado é uma consequência dos resultados previstos pelas equações de Maxwell do eletromagnetismo.)

Esses postulados implicam que **espaço** e **tempo** são conceitos relativos e não absolutos, isto é, cada observador os experimenta de uma maneira. Aqui comentarei apenas o efeito de dilatação do tempo pois será necessário na dedução do efeito doppler relativístico.

Para isso, imagine um vagão de trem com altura H em movimento retilíneo uniforme com velocidade v e dois observadores: um dentro do trem e outro fora do trem o observando. Imagine também que dentro do trem existe uma fonte em seu chão que emitirá 1 fóton que será absorvido pelo teto do vagão.

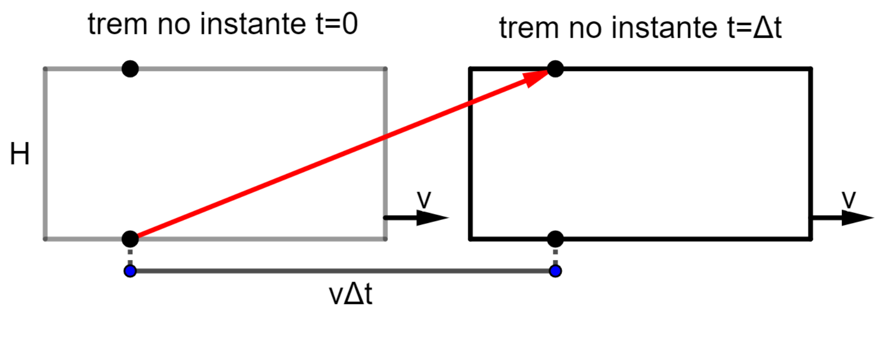
O observador que está viajando pelo trem verá o fóton se movendo a uma velocidade c e percorrendo uma disntância H, como na figura abaixo:



Portanto o intervalo de tempo Δt_0 levado pelo fóton para percorrer essa trajetória será dado por:

$$\Delta t_0 = \frac{H}{c}$$

Agora, no referencial do observador fora do vagão, o fóton percorrerá uma distância diferente devido ao movimento do trem. Observe o esquema abaixo:



Nele, vemos que a distância d percorrida pelo fóton é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $v\Delta t$ e H, logo:

$$d^2 = H^2 + (v\Delta t)^2 \Rightarrow d = \sqrt{H^2 + v^2\Delta t^2}$$

Portanto o intervalo de tempo Δt para o fóton alcançar o teto do vagão no referencial do observador fora do trem é dado por:

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{\sqrt{H^2 + v^2\Delta t^2}}{c} \Rightarrow \Delta t^2 c^2 = H^2 + v^2\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t^2(c^2 - v^2) = H^2 \Rightarrow \Delta t^2 = \frac{H^2}{c^2 - v^2}$$

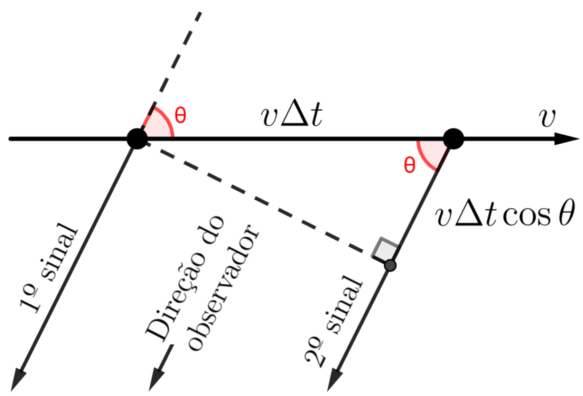
Como $H = c\Delta t_0$, então:

$$\Delta t^2 = \frac{c^2\Delta t_0^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2\Delta t_0^2}{c^2(1 - v^2/c^2)} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

Com isso, note que como $\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1$, então $\Delta t > \Delta t_0$.

2.2 *Efeito Doppler Relativístico*

Considere uma fonte de luz distante que emite um sinal de luz no tempo t_{rep_1} e outro sinal no tempo $t_{rep_2} = t_{rep_1} + \Delta t_0$, assim medido por um relógio em repouso em relação à fonte. Se essa fonte de luz está se movendo com velocidade v relativamente a um observador, como mostrado na figura abaixo, então o tempo entre o recebimento dos sinais de luz na localização do observador dependerá tanto do efeito de dilatação do tempo quanto da diferença de distância percorrida pelos sinais da fonte ao observador. (Assumi-se que a fonte de luz está suficientemente distante de forma que os sinais viajam ao longo de caminhos paralelos até o observador.)



No referencial do observador, o intervalo de tempo entre **as emissões** dos sinais será dada por

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Nesse intervalo, o observador determina que a distância até a fonte de luz mudou em $v\Delta t \cos\theta$. Portanto o intervalo de tempo $\Delta t'$ entre **os recebimentos** dos dois sinais de luz na localização do observador é:

$$\Delta t' = \Delta t + \frac{v\Delta t \cos\theta}{c} = \Delta t\left(\frac{c + v\cos\theta}{c}\right) = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\frac{c + v\cos\theta}{c}\right)$$

Como Δt_0 é o intervalo de tempo entre a emissão das cristas da onda eletromagnética (ou seja, o périodo no referencial da fonte) e $\Delta t'$ é o intervalo entre a chegada delas (ou seja, o período no referencial do observador), então, sabendo que a frequência é definida como o inverso do período, temos:

$$\Delta t' = \frac{1}{\nu_{obs}}$$

e

$$\Delta t_0 = \frac{1}{\nu_{emit}}$$

Logo:

$$\nu_{obs} = \nu_{emit}\frac{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c + v\cos\theta}$$

Como $v_r = v\cos\theta$, então:

$$\nu_{obs} = \nu_{emit}\frac{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c + v_r}$$

Considerando que o movimento da fonte fosse unicamente radial, teríamos que $\cos\theta = 0$, logo $v = v_r$, obtendo:

$$\nu_{obs} = \nu_{emit}\frac{c\sqrt{1 - v_r^2/c^2}}{c + v_r} = \nu_{emit}\frac{c\sqrt{c^2 - v_r^2}}{c(c + v_r)} = \nu_{emit}\frac{c\sqrt{c^2 - v_r^2}}{c(c + v_r)} = \nu_{emit}\sqrt{\frac{(c + v_r)(c - v_r)}{(c + v_r)^2}}$$

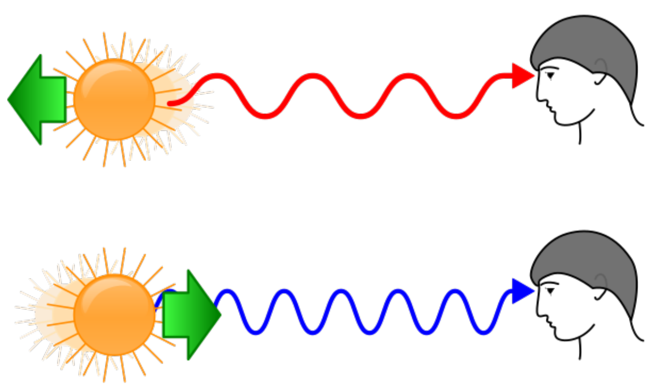
Chegando nas equações do Efeito Doppler Relativístico para as frequências:

$$\boxed{\nu_{obs} = \nu_{emit}\sqrt{\frac{c - v_r}{c + v_r}} = \nu_{emit}\sqrt{\frac{1 - v_r/c}{1 + v_r/c}}}$$

Para os comprimentos de onda, basta lembrar que $\nu = c/\lambda$, logo:

$$\boxed{\lambda_{obs} = \lambda_{emit}\sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}} = \lambda_{emit}\sqrt{\frac{1 + v_r/c}{1 - v_r/c}}}$$

Quando astrônomos observam uma estrela ou galáxia se afastando ou se aproximando da Terra, o comprimento de onda da luz que eles recebem é deslocado para maiores ou menores comprimentos de ondas, respectivamente. Se a fonte de luz está se afastando do observador ($v_r > 0$), então $\lambda_{obs} > \lambda_{emit}$. Esse desvio para um comprimento de onda maior é chamado de **redshift**. Similarmente, se a fonte está se aproximando do observador ($v_r < 0$), então há um deslocamento para um comprimento de onda menor, um **blueshift**.



A maioria dos objetos no universo fora da Via Láctea estão se afastando de nós, então redshifts são mais comumente medidos por astrônomos. Um parâmetro de redshift z é usado para descrever a mudança no comprimento de onda, sendo definido por:

$$\boxed{z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emit}}{\lambda_{emit}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{emit}}}$$

E portanto, também pode ser dado por:

$$\boxed{z = \sqrt{\frac{1 + v_r/c}{1 - v_r/c}} - 1}$$

2.3 *Efeito Doppler Não-Relativístico*

Como nesse caso desprezaremos a dilatação do tempo, temos que a única diferença causada na medição do período será oriunda da diferença de distância percorrida do 2º sinal comparado ao 1º. Ou seja:

$$\Delta t' = \Delta t_0 + \frac{v \Delta t_0 \cos\theta}{c} = \Delta t_0 \left(\frac{c + v\cos\theta}{c} \right) \Rightarrow \nu_{obs} = \frac{\nu_{emit}\, c}{c + v\cos\theta}$$

Tomando o sentido positivo da velocidade radial, usaremos $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$:

$$\nu_{obs} = \frac{\nu_{emit}\, c}{c + v_r}$$

Como $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$:

$$\frac{c}{\lambda_{obs}} = \frac{c^2}{\lambda_{emit}(c + v_r)} \Rightarrow v_r + c = \frac{c\,\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} \Rightarrow \frac{v_r}{c} + 1 = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} \Rightarrow \frac{v_r}{c} = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emit}}{\lambda_{emit}}$$

Sendo $\lambda_{obs} \equiv \lambda$ e $\lambda_{emit} \equiv \lambda_0$:

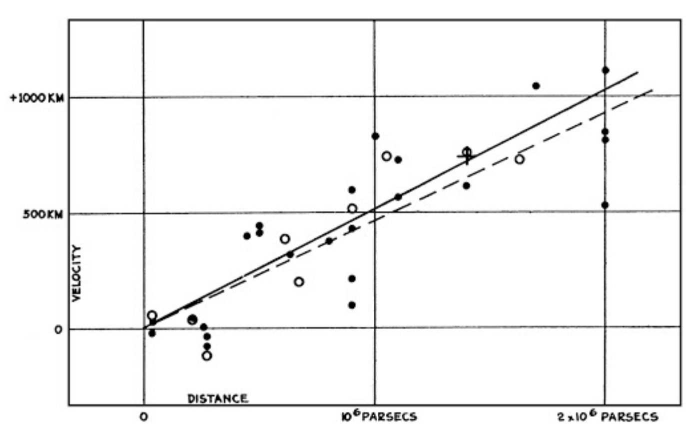
$$\boxed{z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}}$$

3. Lei de Hubble

3.1 *A Lei*

Após Edwin Hubble concluir que a Galáxia de Andrômeda era separada da Via Láctea, ele começou a fazer medições de outras galáxias. Com isso ele não só verificou que a maioria das galáxias tinha um desvio para o vermelho, mas também que este desvio era tanto maior quanto maior a distância até elas.

Com os resultados, ele construiu um gráfico (figura abaixo) com os dados de 46 galáxias, encontrando uma relação linear entre velocidade e distância. Infelizmente, as incertezas eram muito grandes e os resultados não foram considerados conclusivos imediatamente.



A relação a que Hubble chegou foi:

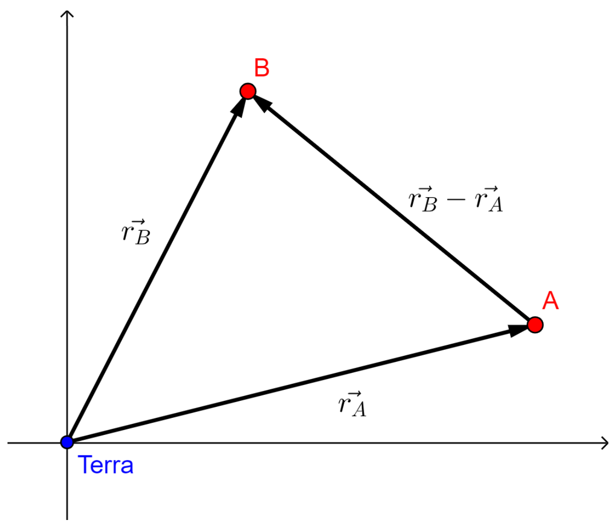
$$\boxed{v = H_0 d}$$

em que:

- v é a velocidade de expansão (usualmente em km/s)
- d é a distância (usualmente em Mpc)
- H_0 é a constante de Hubble (usualmente em $\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$)

Um pensamento comum que eventualmente pode surgir é: "se as galáxias estão se afastando de nós, então nós estamos no centro do universo". Contudo, essa conclusão é incorreta!

Para refutar esse raciocínio,mostrarei através da prórpia Lei de Hubble que a expansão do universo acontece da mesma maneira para qualquer obervador em qualquer localização. Para isso, considere a Terra na origem de um sistema de coordenadas, como mostrado abaixo, e considere duas galáxias, A e B, distando r_A e r_B da Terra, respectivamente.



De acordo com a Lei de Hubble, a velocidade de recessão das duas galáxias são descritas pelos vetores:

$$\vec{v}_A = H_0 \vec{r}_A$$

e

$$\vec{v}_B = H_0 \vec{r}_B$$

Portanto a velocidade de recessão da Galáxia B vista por um observador na Galáxia A é:

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = H_0 \vec{r}_B - H_0 \vec{r}_A = H_0(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

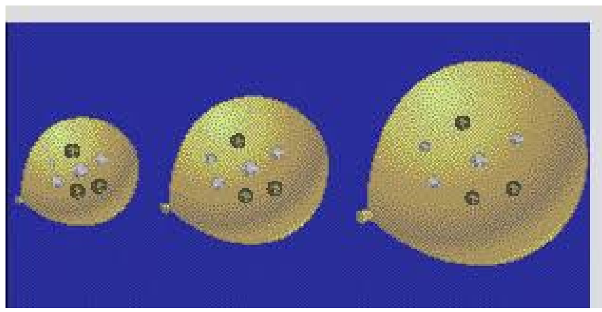
O que coincide com o resultado esperado ao aplicar a Lei de Hubble diretamente entre essas galáxias, pois a distância entre elas é dada pelo vetor $\vec{r}_B - \vec{r}_A$.

Assim, o observador na Galáxia A vê todas as outras galáxias no universo se afastando com velocidades de recessão descritas pela *mesma* Lei de Hubble que na Terra.

Outro ponto importante é que, por mais que o valor da "constante" de Hubble é assumida ser a mesma para todos observadores, na verdade ela é uma função do tempo $H(t)$. Sendo o tempo atual igual t_0, então $H_0 \equiv H(t_0)$.

Também vale ressaltar que uma galáxia pode ter uma velocidade **de expansão** maior que a velocidade da luz. Isso se dá pois, na realidade, essa velocidade não é da galáxia em si, mas sim do espaço que as contêm. Em outras palavras, as galáxias estão se afastando uma das outras devido ao aumento do espaço entre elas. (não confunda **a expansão do espaço** com **o movimento dos objetos no espaço**).

Uma analogia interessante que pode te ajudar a entender essa ideia é imaginar uma bexiga com pontos desenhados em sua superfície. Se você começar a enchê-la, verá que a distância entre os pontos sobre a superfície irá aumentando. A velocidade com que esses pontos se afastam está atrelada à velocidade com que a bexiga se estica conforme ela é enchida. Agora pense que que a bexiga é o espaço e os pontos são as galáxias! A imagem abaixo ilustra essa analogia:



Outro ponto interessante é que a partir da Lei de Hubble pode-se mostrar que o espaço se expande exponencialmente com o tempo. Dessa forma:

$$v = \frac{dr}{dt} = H_0 r \Rightarrow \frac{dr}{r} = H_0 dt \Rightarrow \int \frac{1}{r}\, dr = \int H_0\, dt \Rightarrow \ln r = H_0 t + C$$

Em que C é uma constante de integração. Pela definição do logaritmo natural:

$$r = e^{H_0 t + C} = e^{H_0 t} \cdot e^{C}$$

Para calcular e^C, basta perceber que quando $t = 0 \Rightarrow r = r_0$, então:

$$r_0 = e^0 e^C \Rightarrow e^C = r_0$$

Portanto, temos:

$$\boxed{r = r_0 \cdot e^{H_0 t}}$$

3.2 *Tempo de Hubble/ Idade do Universo*

Qual é a idade do universo? A matéria total do universo gera atração gravitacional, em que objetos atraem outros objetos (inclusive a luz, pela relatividade geral). Se a energia escura fosse nula, isto é, se a expansão do universo fosse constante, a atração gravitacional deveria diminuir a expansão, o que implicaria que no passado a expansão teria sido mais rápida. Neste caso, a idade do Universo pode ser calculada, no limite superior, assumindo que a quantidade de matéria é pequena e que, portanto, não teria reduzido a velocidade de expansão significativamente.

Podemos então estimar a idade máxima do universo, t_0, calculando o tempo que as galáxias distantes, afastando-se à mesma taxa de expansão atual, levaram para chegar aonde estão, assumindo energia escura nula.

Como a lei de Hubble, que relaciona a velocidade de recessão das galáxias é dada por

$$v = H_0 d$$

e a definição física de velocidade é $v = d/t = 1/t \cdot d$, comparando as duas equações acima vemos que H_0 tem a dimensão de $1/t$. Podemos então definir:

$$t_0 = \frac{1}{H_0}$$

Onde t_0 é o tempo passado desde a época em que as galáxias estavam todas juntas até a época atual. Em outras palavras, t_0 é a idade do universo para uma taxa de expansão constante (H_0). Portanto, medindo a constante de Hubble podemos estimar a idade do universo.

Tomando o valor $H_0 = 73 \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ e sabendo que $1\mathrm{Mpc} = 3{,}0856 \cdot 10^{19}\mathrm{km}$ e $1\mathrm{ano} = 3{,}156 \cdot 10^7 s$, temos:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} = \frac{3{,}0856 \cdot 10^{19}}{73 \cdot 3{,}156 \cdot 10^7} \approx 13{,}4 \cdot 10^9 \mathrm{anos}$$

Ou seja, o universo tem aproximadamente 13,4 bilhões de anos. Vale lembrar que esse valor é apenas uma estimativa em que assumimos algumas condições ideais (desconsideramos efeitos gravitacionais e a mudança da taxa de expansão).

Levando-se em conta uma possível desaceleração causada pela atração gravitacional, a idade seria um pouco menor do que esse valor, pois se a expansão foi mais rápida no início, o universo teria chegado ao estado atual em um tempo menor que H_0^{-1}. Se, pelo contrário, o universo estiver acelerando pela presença de energia escura, ele estava se expandindo mais lentamente no passado e, portanto, levou mais tempo para chegar ao estado atual, ou seja, nesse caso sua idade é maior do que H_0^{-1}.

3.3 *Imprecisão no valor de* H_0

As estimativas para a constante de Hubble são bem imprecisas por diversos fatores, por exemplo: efeitos gravitacionais não desprezáveis que afetam o movimento das galáxias, sendo necessário ter em conta o termo de velocidade peculiar das galáxias.

Outro fator que também alterou alguns resultados foi o fato da luz, que viaja entre a estrela e o observador, passa por nuvens de gás e poeiras e também pela nossa atmosfera, conferindo um tom mais avermelhado ao brilho das estrelas. Este problema, conhecido como extinção interestelar, foi apenas resolvido nas décadas de 30-40.

Esses e outros problemas fizeram com que Hubble encontrasse um valor para H_0 de $500\,\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$, um erro muito grosseiro comparado aos valores aceitos atualmente. Confira abaixo uma tabela com valores medidos de H_0:

Valor ($\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$)	Data	Determinado por/Missão:
75	1958	Allan Sandage
50 - 90	1996	-
72 ± 8	2001-2005	Telescópio Hubble
$70{,}4 \pm 1{,}6$	2007	WMAP
$70{,}4 \pm 1{,}4$	2010	WMAP
$69{,}32 \pm 0{,}80$	2012	WMAP
$67{,}15 \pm 1{,}20$	2013	Planck
68 ± 4.2	2019	Adam Riess
74	2019	SH0ES
73	2020	COSMOGRAIL

Tabela 1: Valores medidos da Constante de Hubble H_0 (fonte:Wikipedia)

4. Problemas

- **Constantes**
  - $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
  - $M_{sol} = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg
  - $1pc = 3{,}086 \cdot 10^{16}$ m
  - $c = 3 \cdot 10^8$ m/s
  - $m_\odot = -26{,}72$ mag
  - $1U.A. = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

Problema 1. O redshift observado de um quasar é $z = 0.20$, estime sua distância. A constante de Hubble é $72\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$

Problema 2. (IOAA 2011) Dado que a radiação cósmica de fundo tem o espectro de um corpo negro ao longo da evolução do Universo, determine como sua temperatura muda com o redshift z. Em particular, encontre a temperatura da radiação de fundo na época $z \approx 10$ (a dos objetos mais distantes atualmente observados). A temperatura atual da radiação cósmica de fundo é 2,73K.

Problema 3. (IOAA 2008) Considere uma supernova do tipo Ia em uma galáxia distante que tem uma luminosidade máxima de $5{,}8 \cdot 10^9 \mathrm{L}_\odot$. Suponha que você observe esta supernova usando seu telescópio e descubra que seu brilho é $1{,}6 \cdot 10^{-7}$ vezes o brilho de Vega. O redshift de sua galáxia hospedeira é conhecido como $z = 0{,}05$. Calcule a distância desta galáxia (em pc) e também o tempo de Hubble.

Problema 4. (IOAA 2008) Observações de comprimento de onda de rádio de nuvens de gás girando em torno de um buraco negro no centro de nossa galáxia mostram que a radiação da transição spin-flip do hidrogênio é detectada em uma frequência de 1421,23MHz. Se esta nuvem de gás está localizada a uma distância de 0,2pc do buraco negro e está orbitando em um círculo, determine a velocidade desta nuvem e se ela está se aproximando ou se afastando de nós e calcule a massa do buraco negro em $M_\odot$.

Problema 5. Uma hipótese uma vez usada para explicar a Lei de Hubble é a "hipótese da luz cansada". A hipótese da luz cansada afirma que o universo não está se expandindo, mas que os fótons simplesmente perdem energia ao moverem-se pelo espaço (por algum meio inexplicado) com a perda de energia por unidade de distância sendo dada por:

$$\frac{dE}{dr} = -KE$$

em que K é uma constante. Mostre que essa hipótese resulta em uma relação distância-redshift linear quando $z \ll 1$. Qual deve ser o valor de K a fim de fornecer um valor para a constante de Hubble de $H_0 = 70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$?
Se necessário, use a aproximação $\ln(1+x) \approx x,$ se $x \ll 1$.

5. Gabarito

Problema 1. $d \approx 800\text{Mpc}$

Problema 2. Dica: utilize a Lei de Wien. Resposta: $T \approx 30\text{K}$.

Problema 3. $d_{SN} \approx 204\text{Mpc}$ e $t_0 \approx 13{,}3 \cdot 10^9\text{anos}$.

Problema 4. $M_{BN} \approx 1{,}4 \cdot 10^9 \text{M}_\odot$, a nuvem está se aproximando com uma velocidade de $v \approx 174\text{km/s}$.

Problema 5. $K \approx 2{,}33 \cdot 10^{-4}\text{Mpc}^{-1}$