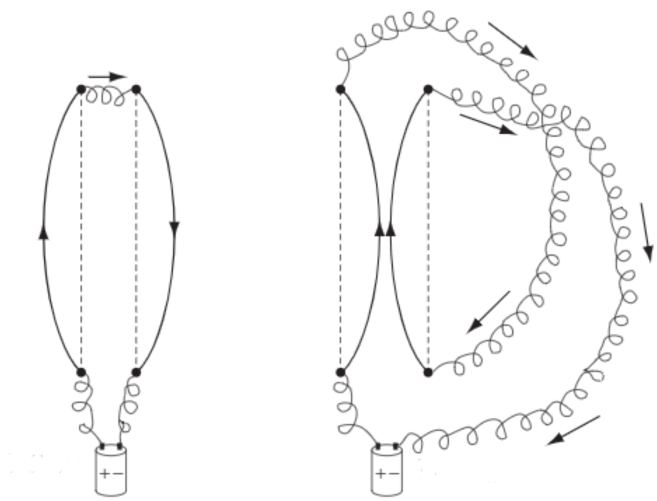
Campos magnéticos

Matheus Borges - Projeto Olímpicos

1. Introdução: De onde vem os campos magnéticos

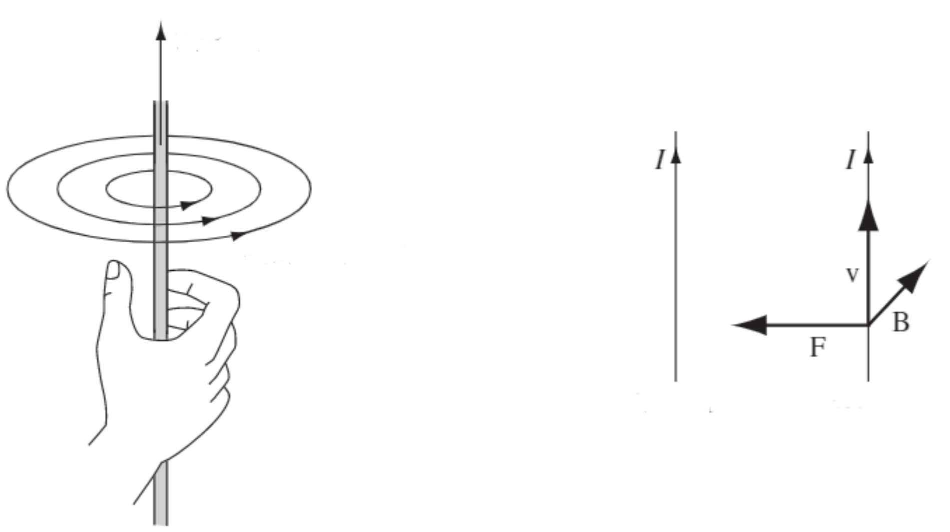
Imagine que você se encontra em um laboratório e tem em suas mãos uma bateria e alguns fios e decide montar alguns circuitos. Com um pouco de atenção você vai perceber que ao aproximar fios com correntes em sentidos opostos, eles vão se repelir, caso aproxime fios com correntes no mesmo sentido, eles se atraem.



Como explicar isso? Você pode pensar que a força é devido interações elétricas, porém isso não é verdade, pois o fio se encontra eletricamente neutro (Sabemos que as cargas negativas estão em movimento no fio, entretanto em qualquer segmento existe a mesma quantidade de cargas positivas estacionárias e negativas em movimento). Então aqui estamos diante de um novo fenômeno e precisamos de uma maneira de descrevê-lo. Esse é um fenômeno magnético e ele está totalmente relacionado a cargas em movimento. Fenômenos magnéticos são muito fáceis de serem percebidos na prática, basta olhar para os imãs em sua geladeira ou pegar uma bússola (Por enquanto não vamos nos preocupar em como esse dispositivo funciona, só precisamos saber que ele indica a direção do campo magnético local).

2. Lei de força de lorentz

Se colocarmos uma bússola próxima a um fio vamos perceber que curiosamente o campo magnetico circula em torno do fio, se você colocar seu polegar direito no sentido da corrente seus dedos vão se dobrar no sentido do campo magnético. Agora você pode se perguntar, como podemos descrever forças magnéticas? Pode ser uma tarefa um pouco confusa de primeira. Vamos olhar o caso do fio com correntes paralelas, as cargas se movimetam pra cima, o campo magnetico é perpendicular à velocidade das cargas (entrando na página) e a força é perpendicular à velocidade e ao campo magnético.



Podemos descrever a força magnética numa carga q como um produto vetorial, de forma que

$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

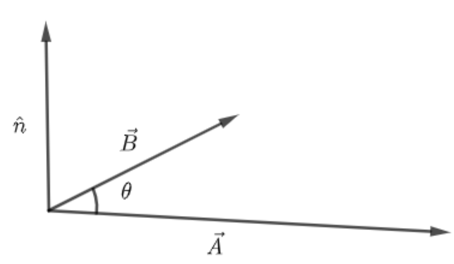
Essa é a chamada lei de força de lorentz que na presença de campos elétricos e magnéticos, a força líquida sobre uma carga q pode ser escrita como

$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Caso não seja de conhecimento do leitor como funciona o produto vetorial vou explicar agora. O produto vetorial é definido por

$$\vec{A} \times \vec{B} = (AB \operatorname{sen} \theta)\, \hat{n}$$

onde θ é o ângulo entre os dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e $\hat{n}$ é um vetor unitário (de módulo 1) que aponta na direção perpendicular ao plano de $\vec{A}$ e $\vec{B}$, como existem duas direções perpendiculares podemos determinar $\hat{n}$ através da regra da mão direita ou regra de fleming. Aponte seus dedos da mão direita (com exceção do polegar, mantenha-o perpendicular aos outros) na direção do vetor $\vec{A}$ e vire a palma da mão de forma a apontar para o segundo vetor, assim seu polegar indicará a direção de $\hat{n}$



Além do produto vetorial também existe o produto escalar, ele é definico por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

O trabalho da força magnética

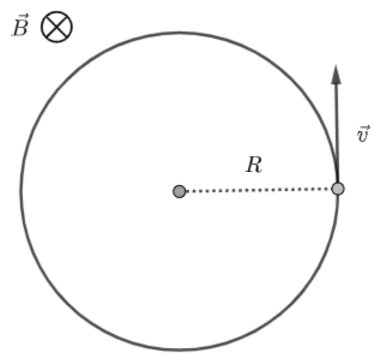
Um foto interessante que conseguimos observar a partir da lei de força de lorentz é que forças magnéticas em cargas pontuais não realizam trabalho, pois o produto vetoral $\vec{v} \times \vec{B}$ sempre é perpendicular à velocidade, o trabalho é $\tau = \vec{F}_{mag} \cdot \Delta\vec{x} = \left(\vec{F}_{mag} \cdot \vec{v}\right) \Delta t = 0$

Movimento ciclotrônico

Considere uma partícula carregada q com velocidade de módulo v mergulhada numa região com campo magnético $\vec{B}$ perpendicular à velocidade, qual a trajetória da partícula? A única força que a partícula sofre é a força magnética $F = qvB$, que atua perpendicularmente à velocidade. Podemos escrever para a força na direção radial

$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$
$$R = \frac{mv}{qB}$$

Onde R é o raio de curvatura da trajetória, como não há forças tangenciais o módulo da velocidade é constante, logo o raio de curvatura sempre é o mesmo, ou seja, a partícula move-se numa trajetória circular, chamamos esse movimento de movimento ciclotrônico.(o símbolo $\otimes$ indica que o campo aponta para dentro da página)



3. Corrente elétrica

A corrente que passa por um fio é a carga por unidade de tempo que passa num ponto. Por definição cargas negativas indo para a esquerda valem o mesmo que cargas positivas inda para a direita, pois na maior parte dos fenômenos há uma dependência do produto $q\vec{v}$ (Como na força de lorentz). Sabemos que na realidade são as cargas negativas que se movimentam no sentido contrário a corrente, porém é conveniente considerar que são as cargas positivas que se movem na direção da corrente. Correntes são medidas em coulombs por segundo ou ampère (A), pela definição de corrente

$$I = \frac{dq}{dt}$$

para uma distribuição linear de carga λ se movendo com velocidade de módulo v chegamos em

$$I = \lambda v$$

Agora vou dar um caráter vetorial à corrente

$$\vec{I} = \lambda \vec{v}$$

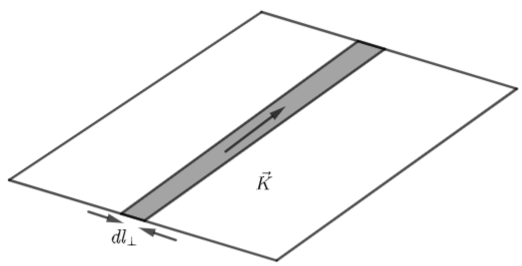
Existe uma grande discussão no meio acadêmico se deveríamos considerar a corrente como uma grandeza escalar ou vetorial, pode parecer através das explicações que dei que realmente a corrente é algo vetorial, porem é perfeitamente possível considerar a corrente como uma grandeza escalar, tanto que fazemos isso ao estudar circuitos elétricos, então fica à escolha do leitor decidir qual caminho seguir.

Quando uma carga flui por uma superfície podemos descrevê-la por uma densidade superficial de corrente $\vec{K}$, definida da seguinte forma: considere uma 'fita' de largura $dl_\perp$ paralela ao fluxo, se na fita passa uma corrente $d\vec{I}$ então a densidade superficial é

$$\vec{K} = \frac{d\vec{I}}{dl_\perp}$$

Ou seja, K é a corrente por unidade de comprimento perpendicular ao fluxo. Para o caso de uma distribuição superficial σ com velocidade $\vec{v}$ temos

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}$$

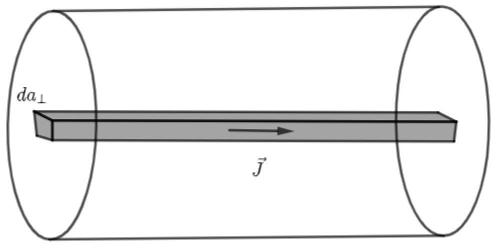


Quando uma carga flui por um volume podemos descrevê-la por uma densidade volumétrica de corrente $\vec{J}$, definida como segue: considere um 'tubo' de seção transversal $da_\perp$ disposto paralelamente ao fluxo de carga. Se uma corrente $d\vec{I}$ passa pelo tubo, então a densidade volumétrica de carga é

$$\vec{J} = \frac{d\vec{I}}{da_\perp}$$

Ou seja, $\vec{J}$ é a corrente por unidade de área perpendicular ao fluxo. Para o caso de uma densidade volumétrica ρ com velocidade $\vec{v}$ temos

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$



4. lei de Biot-Savart

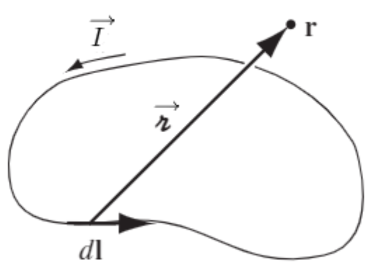
Agora vamos estudar o campo magnético gerado por correntes estacionárias. Correntes estacionárias são fluxos contínuos de cargas que existem desde sempre, sem alteração e sem acúmulo de cargas em nenhum lugar. O campo gerado por esse tipo de corrente é dado pela lei de Biot-Savart

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} dl}$$

A integração é ao longo do caminho da corrente $\vec{I}$, dl é um comprimento infinitesimal do fio, e $\vec{\mathscr{r}}$ é um vetor que liga um ponto do fio ao ponto que queremos calcular o campo. A constante μ_0 é chamada de permeabilidade do vácuo

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$$

as unidades estão de tal forma que $\vec{B}$ é dado em newtons por ampère-metro ou tesla (T)



Caso considere a corrente como uma grandeza escalar vamos considerar $d\vec{l}$ como um vetor que aponta na direção do movimento das cargas, a lei de Biot-Sarvat fica

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}}$$

Note que I 'sai' da integral, pois pela definição de corrente estacionária a corrente é a mesma em todo lugar e não muda com o tempo.

para densidades superficiais e volumétricas a lei de Biot-Sarvat torna-se

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K} \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} da$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}dv$$

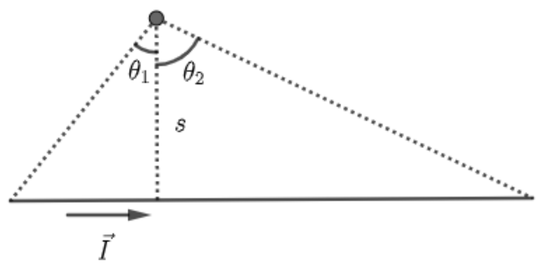
Você pode pensar que o campo magnético gerado por uma carga pontual q é , por pura analogia:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

Porém cargas pontuais não constituem correntes estacionárias, pois existe um acúmulo de carga que muda de posição conforme o tempo. O campo gerado por cargas pontuais demanda uma análise muito complexa que não faremos aqui, entretanto esse resultado é uma boa aproximação para cargas com velocidades muito menores que a velocidade da luz.

Campo de um segmento de fio

Vamos calcular o campo gerado em um ponto a uma distância s de um segmento de fio, como mostra a figura



No diagrama $d\vec{l}\times\hat{\mathscr{r}}$ aponta para fora da página e tem magnitude

$$dl\cos\theta$$

Temos que $l = s\theta$, então

$$dl = \frac{s}{\cos^2\theta}d\theta$$

e $\mathscr{r} = \frac{s}{\cos\theta}$, então pela lei de Biot-Sarvat

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int_{-\theta_1}^{\theta_2}\left(\frac{cos^2\theta}{s^2}\right)\left(\frac{s}{cos^2\theta}\right)\cos\theta d\theta$$

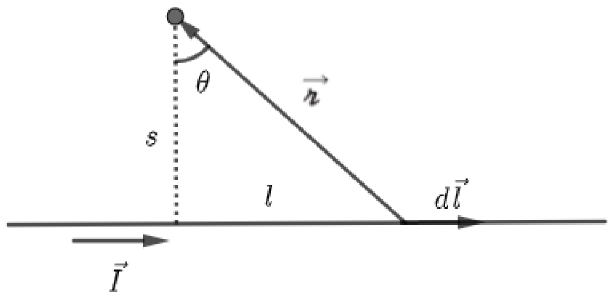
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi s}I(\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi s}I(\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1)\hat{\phi}$$

$\hat{\phi}$ é um versor unitário que 'roda' em torno do fio como ja definimos antes.

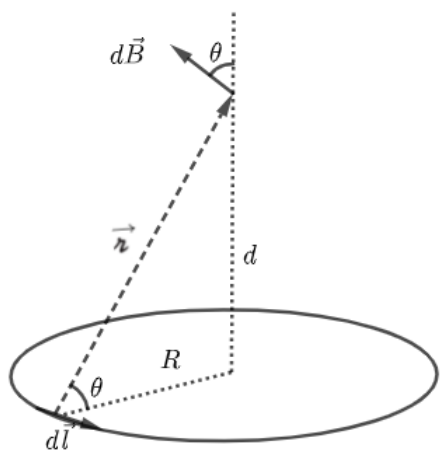
Para um fio infinito ($\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$) o campo é

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi s} I\hat{\phi}}$$



Campo de uma espira

Vamos calcular o campo magnético a uma distância d acima do centro de uma espira circular de raio R



$d\vec{B}$ é o campo magnético devido um segmento $d\vec{l}$. Por simetria as componentes horizontais se cancelam, então as componentes verticais combinadas resultam no seguinte campo na vertical

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\cos\theta dl}{\mathscr{r}^2}$$

Então o módulo do campo magnético é

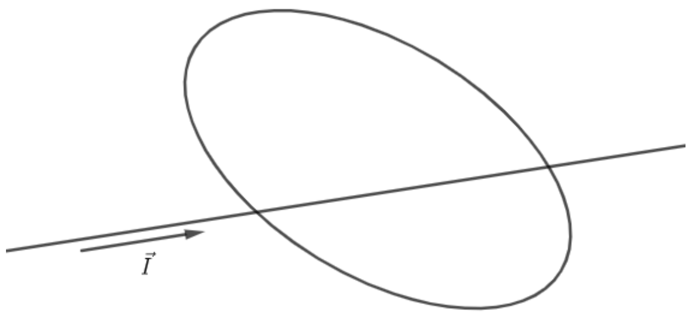
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{\cos\theta}{\mathscr{r}^2}\right) 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

5. Lei de Ampère

Agora vamos calcular a integral do campo magnético em um caminho, ou seja,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

o símbolo $\oint$ significa que os limites da integral são tais que estaremos integrando num caminho fechado como na figura



O campo de um fio infinito é

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi s} I\hat{\phi}$$

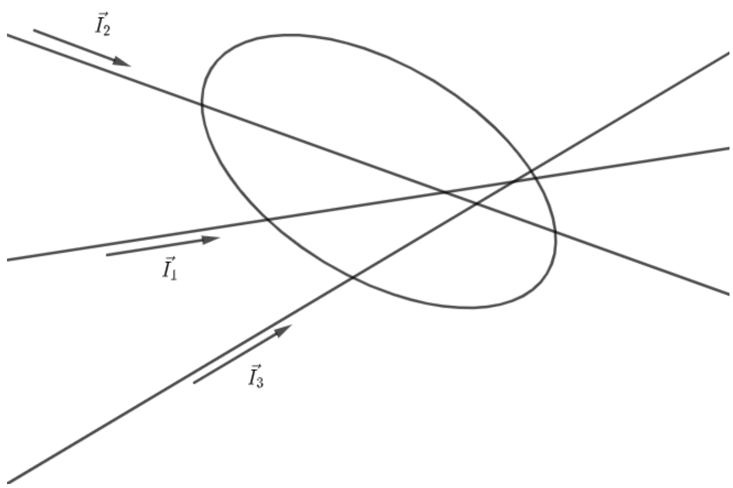
E sabemos que $d\vec{l} = ds\hat{s} + sd\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$, integrando no caminho fechado temos

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0}{2\pi s} I\hat{\phi} \cdot (ds\hat{s} + sd\phi\hat{\phi} + dz\hat{z})$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi s} Isd\phi$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

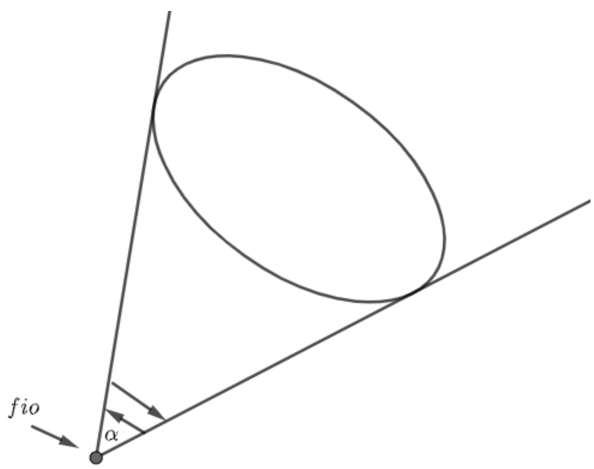
Vemos que o termo com a distância (s) some, ou seja, independente do formato do caminho a integral será a mesma, então podemos passar mais fios em diferentes direções



Nesse caso a integral no caminho será

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_1 + I_2 + I_3)$$

Caso tenha um fio fora do caminho a contribuição dele para a integral de linha será 0, pois a integração iria até um ângulo α e voltaria zerando a integral



Podemos dizer então que a integral em um caminho fechado do campo magnético é

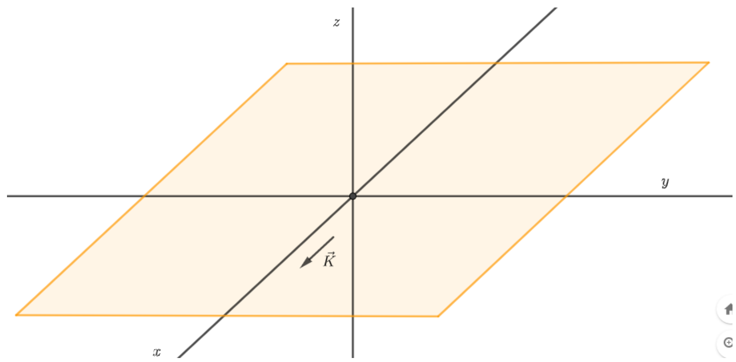
$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}}$$

Onde I_{int} é a corrente que passa por dentro do caminho (Os caminhos que aplicamos a lei de ampère são chamados se circuitos amperianos). Essa é a lei de ampère, fizemos aqui uma prova para fios infinitos, entretanto esse resultado vale para qualquer configuração com correntes estacionárias (como a prova rigorosa é complexa não vou fazê-la aqui).

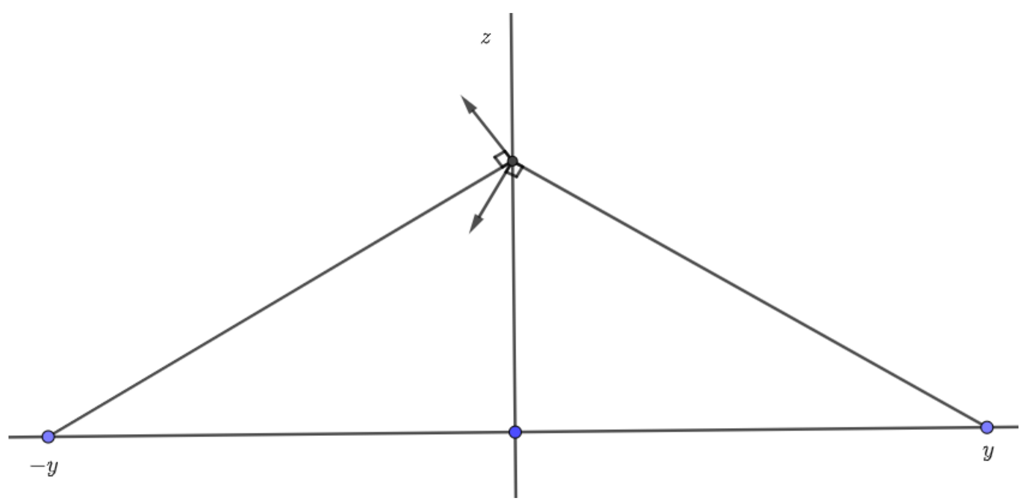
A lei de ampère é bastante útil quando já conhecemos previamente a direção do campo magnético, pois conseguimos calcular o produto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ e assim descobrir o módulo do campo magnético, vamos resolver alguns exemplos agora.

Campo de uma placa infinita

Vamos encontrar o campo magnético de uma placa infinita com densidade superficial de corrente $\vec{K} = K\hat{x}$



Primeiramente, para onde aponta o campo magnético? Imagine a placa como um conjunto de fios infinitos, naturalmente não teremos campo na direção x, pois não há campo na mesma direção da corrente. Também não existe campo na direção z, porque a componente vertical do campo de um fio em y é cancelada com a de um fio em $-y$.



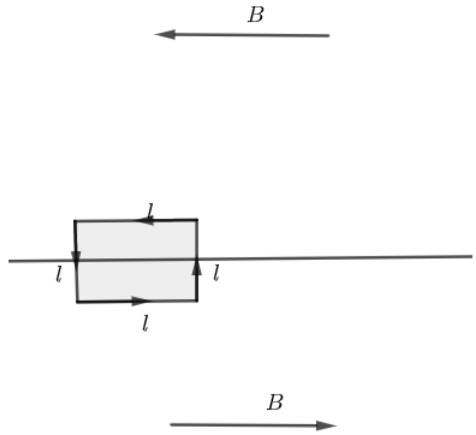
Portanto, só existe campo na direção y, onde para $z > 0$ o campo aponta na direção $-\hat{y}$ e para $z < 0$ aponta na direção $\hat{y}$. Sabemos que por simetria o módulo do campo numa posição $+z$ é o mesmo que numa posição $-z$, então vamos aplicar a lei de ampère no seguinte caminho, um retângulo que uma das bases está em $+z$ e outra em $-z$.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl + (-B)(-l) = 2Bl$$

$$2Bl = \mu_0 I_{int}$$

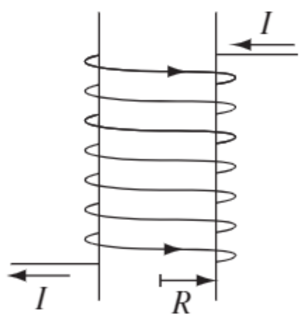
Pela definição da densidade superficial sabemos que $K = \dfrac{I}{l}$, Portanto

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 K}{2}}$$



Campo de um solenoide infinito

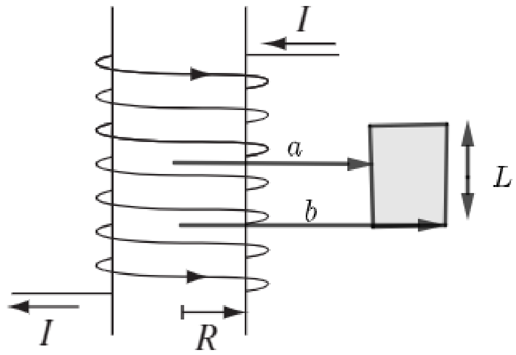
Vamos calcular o campo magnético de um solenoide que consiste em n voltas compactas por unidade de comprimento, em torno de um cilindro de raio R pelo o qual passa uma corrente estacionária I. (O motivo que as voltas são compactas é que podemos considerar as voltas praticamente circulares)



Primeiramente temos que saber a direção do campo magnético. Ele possui campo radial? Não. Imagine que tivesse uma componente radial B_r positiva, se invertêssemos a corrente, segundo a lei de Biot-Sarvat a componente radial agora seria $-B_r$. Porém inverter a corrente é o mesmo que virar o solenoide de cabeça para baixo, e isso, certamente, não alteraria a componente radial. Portanto nao há componente radial. Também não existe componente azimutal (circulando em torno do solenoide), pois B_a seria constante em um circuito amperiano concêntrico com o solenoide e então

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = (2\pi r) B_a = \mu_0 I_{int}$$

Entretanto nenhuma corrente passa por esse circuito amperiano, elas passam tangente ao circuito (aqui surge a importância de considerar o solenoide com voltas compactas). Então concluímos que só existe campo paralelo ao eixo do cilindro. Pela regra da mão direita, esperamos que o campo aponte para cima, dentro do solenoide, e para baixo, fora dele (considerando a configuração da figura). Considere o seguinte circuito amperiano

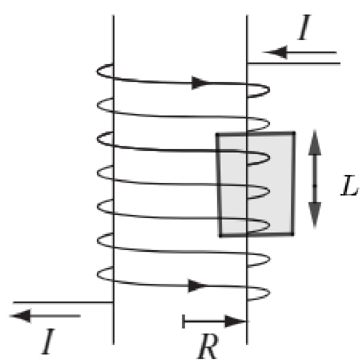


Aplicando a lei de ampère temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B(b) - B(a))\, L = \mu_0 I_{int} = 0$$

$$B(a) = B(b)$$

Ou seja, o campo externo é o mesmo em toda parte. No infinito (distância muito grande do solenoide) o campo magnético será 0 portanto, como o campo externo é 0 em toda parte. Então o solenoide só gera campo dentro dele.



Aplicando a lei de ampere no circuito da figura chegamos em

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 I_{int} = \mu_0 n L I$$

Portanto o solenoide gera um campo dentro dele e na direção do seu eixo com módulo

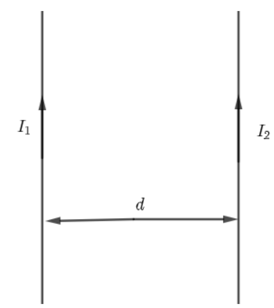
$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

6. Problemas

Os problemas são divididos em simples normal difícil.(Tenha em mente que dificuldade é algo bem subjetivo!)

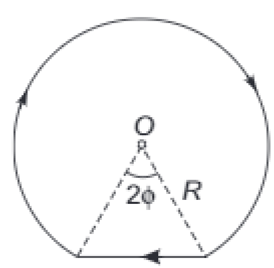
Problema 1. Em uma região $x > -a(a > 0)$ existe um campo magnético homogêneo B na direção z. Na origem existe uma fonte de elétrons que lança elétrons em todas as direções com velocidade v. em $x = -a$ existe uma tela. Se os elétrons tem carga e e massa m determine o raio da região atingida pelos elétrons. Assuma que pelo menos um elétron atinge a tela.

Problema 2. Considere dois fios infintos com corrente I_1 e I_2 separados por uma distância d. Calcule a força sofrida por um pedaço de comprimento l de um dos fios.

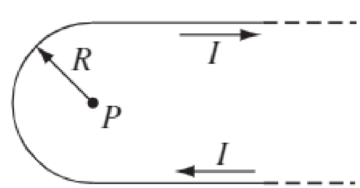


Problema 3. Considere uma região onde há um campo elétrico na direção y e um campo magnético na direção z. Com que velocidade devemos lançar um próton de carga q na direção x para que o próton viaje em linha reta?

Problema 4. Calcule o módulo do campo magnético no ponto O se uma corrente $I = 5A$ flui no circuito. O raio de curvatura é $R = 120mm$ e $\phi = 45°$



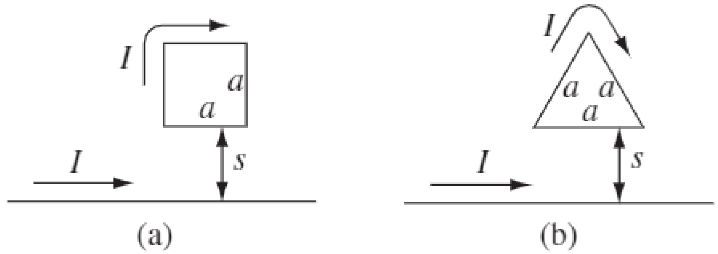
Problema 5. Calcule o módulo do campo magnético no ponto P se uma corrente I no circuito.



Problema 6.

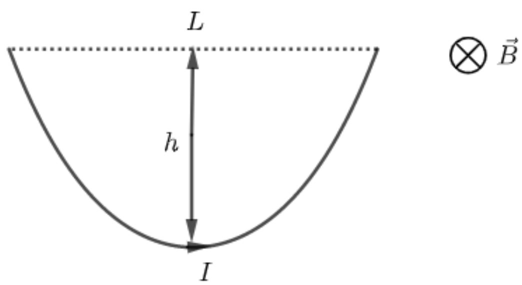
a) Encontre o módulo da força entre o circuito quadrado e o fio infinto.

b) Encontre o módulo força entre o circuito triangular e o fio infinito



Problema 7. Calcule o módulo do campo magnético a uma distâcia r do eido de um cilindro de raio R com densidade de corrente uniforme $\vec{J}$ paralela ao eixo.

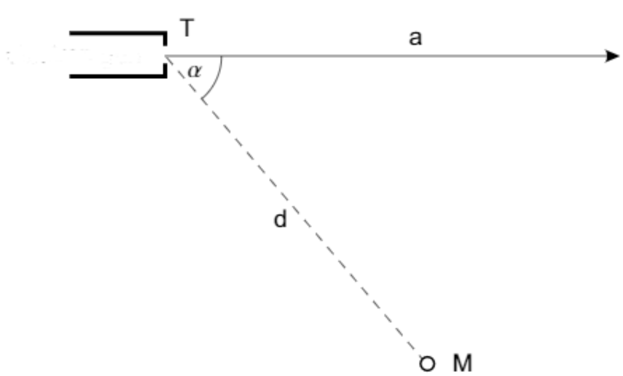
Problema 8. Encontre a força resultante no circuito da figura



Problema 9. Uma arma de elétrons T emite elétrons acelerados por uma diferença de potencial U no vácuo na direção da linha a (veja a figura). Um alvo M é colocado a uma distância d da arma de elétrons de tal maneira que a linha que conecta T a M forma um angulo α com a linha a. Encontre os possíveis valores do campo magnético B quando ele aponta

a) perpendicularmente ao plano definido pela reta a e o alvo M.

b) paralelamente ao segmento TM



Para que os elétons alcancem o alvo. Considere que os elétrons têm massa m e carga $-e$.

7. Gabarito

Problema 1. $r = \sqrt{\left(\frac{2mv}{eB}\right)^2 - a^2}$

Problema 2. $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l$

Problema 3. $v = \frac{E}{B}$

Problema 4. $B = (\pi - \phi + \tan\phi)\frac{\mu_0 I}{2\pi R} = 28\mu T$

Problema 5. $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$

Problema 6. a) $F = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi a(a+s)}$

b) $F = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{a}{s} - \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}a}{2s}\right)\right]$

Problema 7. Para $r < R$, $B = \frac{\mu J r}{2}$; para $r > R$, $B = \frac{\mu J R^2}{2r}$

Problema 8. $F = BIL$ (Para cima)

Problema 9. a) $B = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$

b) $B = \frac{2\pi \cos\alpha N}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$, onde N $\in$ (1,2,3,..])