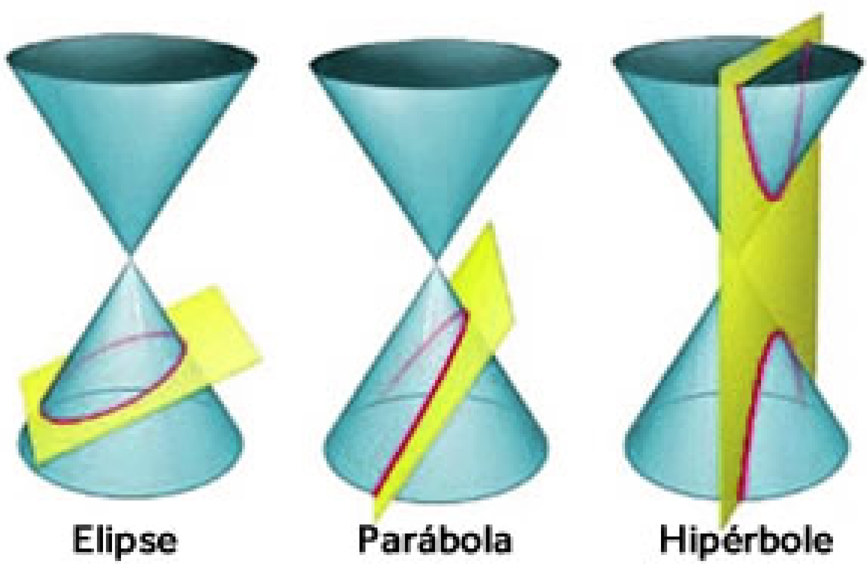
Cônicas e Órbitas

Otávio Casagrande Ferrari - Projeto Olímpicos

1. Introdução

Um dos estudos mais fundamentais da astronomia é o estudo das órbitas. Nesse material trataremos da geometria das órbitas e suas principais características, além de relacionarmos com aspectos físicos relevantes.
Antes disso, vamos lembrar o que são as chamadas cônicas. Elas são figuras geométricas encontradas na intersecção de um plano que atravessa um cone. É possível interseccionar o cone de 3 formas diferentes, gerando 3 figuras geometricas diferentes, conhecidas como elipse, parábola e hipérbole. Observe a imagem abaixo:

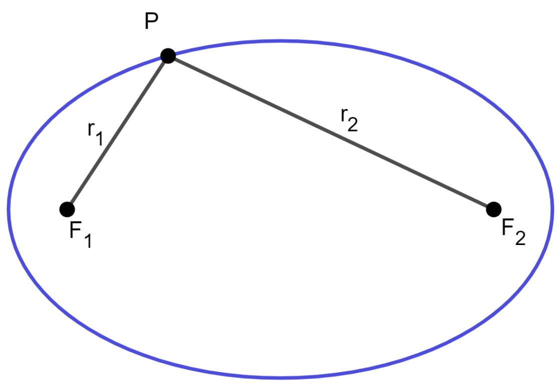


Muitas pessoas após estudar a 1º Lei de Kepler (aquela que possui o seguinte enunciado: "todos os planetas movem-se ao redor do Sol em órbitas elípticas, estando o Sol em um dos focos"), podem pensar que todas as órbitas possuem geometria elíptica, o que não é verdade! Na realidade, um astro pode orbitar um corpo massivo descrevendo não apenas órbitas fechadas (elípticas, como a dos planetas em torno do Sol), mas também em órbitas abertas (parabólica ou hiperbólica, que é o caso de diversos cometas oriundos da Nuvem de Oort, por exemplo). Resumidamente, toda órbita pode ser descrita por uma cônica.
Discutiremos aqui a geometria, a energia e a velocidade associada a cada um desses 3 tipos de órbitas: elíptica, parabólica e hiperbólica.

2. Órbitas elípticas

2.1 Propriedades geométricas

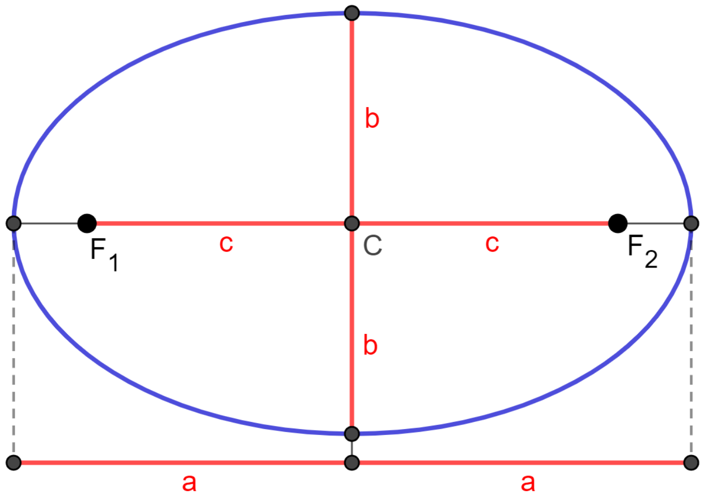
Primeiramente, vamos definir o que é uma elipse: dado 2 pontos F_1 e F_2 cuja distância entre eles é $2c$ com $c > 0$, chama-se elipse o conjunto de pontos P de um plano cuja soma das distâncias $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ é constante e igual a $2a$, em que $a > c$. Observe a imagem a seguir, em que $r_1 + r_2 = 2a$, caracterizando uma elipse.



Agora que definimos o que é uma elipse, vamos entender melhor a definição de todos seus elementos importantes:

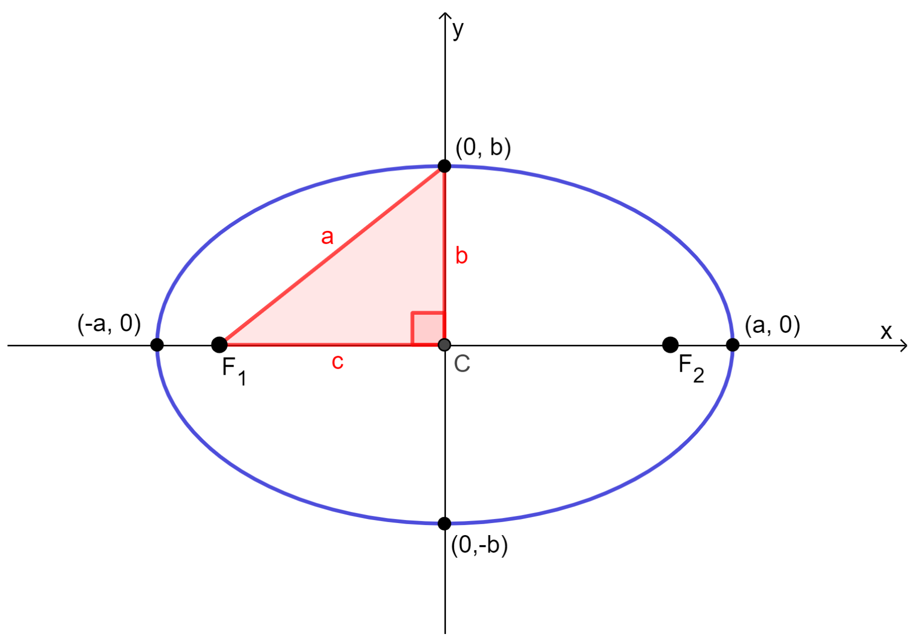
- **Focos** (Pontos F_1 e F_2)
- **Centro** (Ponto C)
- **Semi-eixo maior** (a): maior distância do centro a um ponto na elipse
- **Eixo-maior** ($2a$): o dobro do semi-eixo maior/maior distância entre dois pontos na elipse
- **Semi-eixo menor** (b): menor distância do centro a um ponto na elipse
- **Eixo-menor** ($2b$): o dobro do semi-eixo menor
- **Distância focal** ($2c$): distância entre os focos
- **Excentridade** (e): é um parâmetro associado a qualquer cônica, que mede o seu desvio em relação a uma circunferência. É igual à razão $\dfrac{c}{a}$. Na elipse, temos $0 < e < 1$. Quanto mais próximo de 0, mais a elipse se aproxima de uma circunferência, e quanto mais próximo e está de 1, mais a elipse se aproxima de uma reta.
- **Área** (A): a área de uma elipse é dada por $A = \pi ab$.

Para uma melhor compreensão desses elementos, observe a imagem abaixo:



2.2 *Equações da Elipse*

Agora que você já conhece bem essas características, vamos encontrar a equação reduzida de uma elipse centrada na origem do plano cartesiano e com seu eixo maior sobre o eixo Ox. Para começarmos, vamos antes estabelecer uma relação entre os elementos a, b e c, que nos será útil no desenvolvimento das equações, além de ser uma relação importante em outros momentos, como em alguns exercícios. Para isso, vamos nos basear na imagem abaixo:



Como você pode notar, a distância entre um dos focos F_1 ou F_2 e um dos pontos $(0,b)$ ou $(0,-b)$ é igual a a, pois pela definição de elipse temos que $r_1 + r_2 = 2a$ e nesse caso descrito, a distância r_1 e r_2 são iguais devido à simetria ($r_1 = r_2 = r$). Logo concluímos facilmente que $2r = 2a \Rightarrow r = a$. Sabendo disso, vemos na imagem a formação de um triângulo retângulo cujos lados são os elementos

a, b e c. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

Com isso, partiremos da definição $r_1 + r_2 = 2a$ e substituiremos r_1 e r_2 pelos seus respectivos valores obtidos pela famosa fórmula da distância entre 2 pontos no plano cartesiano.

$$r_1 + r_2 = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$
$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + y^2 + c^2$$
$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$xc = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (a^2 - xc)^2 \Rightarrow a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

Substituindo c^2 por $a^2 - b^2$, temos:

$$a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2 = a^4 + x^2(a^2 - b^2)$$
$$a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2 = a^4 + a^2x^2 - x^2b^2$$
$$a^2y^2 + x^2b^2 = a^2b^2$$

E, finalmente, dividindo a equação por a^2b^2, chegamos na equação da elipse com centro em (0,0):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

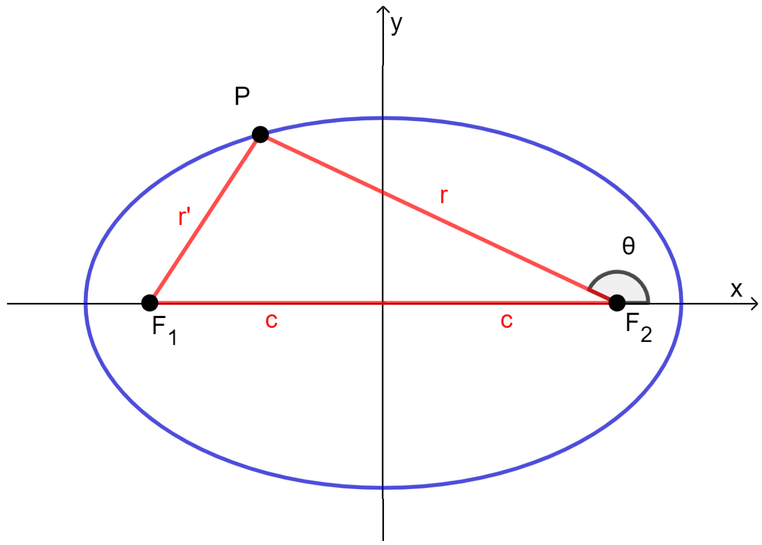
Utilizando o mesmo raciocínio, pode-se demonstrar a equação da elipse com centro em (x_0,y_0) e eixo-maior paralelo ao eixo Ox, que é dada por:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

No caso de uma elipse com centro em (x_0,y_0) mas eixo-maior paralelo ao eixo Oy, temos:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1}$$

Essas equações são bem interessantes, mas talvez não sejam as mais importantes na resolução de problemas relacionados a órbitas. Para esse tipo de estudo, geralmente é mais relevante usarmos a equação da elipse em coordenadas polares, que demonstraremos a partir da imagem abaixo:



Onde o ângulo θ é chamado de **anomalia verdadeira**. Pela lei dos cossenos temos:

$$r'^2 = r^2 + (2c)^2 - 2r(2c)\cos(180° - \theta) \Rightarrow r'^2 = r^2 + 4c^2 + 4rc\cos\theta$$

Lembrando que $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = ae$

$$r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos\theta$$

Como $r' + r = 2a \Rightarrow r' = 2a - r$, substituindo:

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos\theta \Rightarrow 4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos\theta$$

$$a^2(1 - e^2) = ra(1 + e\cos\theta) \Rightarrow a(1 - e^2) = r(1 + e\cos\theta)$$

$$\boxed{r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}}$$

Uma dica: fique atento ao ângulo ao qual θ se refere. Nesse caso, considerei-o como a anomalia verdadeira da elipse, mas você pode se deparar com alguns casos que considera o ângulo suplementar à anomalia verdadeira. Se esse for o caso, você encontrará essa equação polar, mas com um sinal negativo no termo "$e\cos\theta$".
Outros 3 elementos importantes quando estamos falando de órbitas elípticas são os pontos de apoastro, periastro e o semi latus rectum.

- O **periastro** é o ponto em que o corpo orbitante se encontra em sua **menor distância** do corpo orbitado (localizado em um dos focos da elipse). A distância entre os corpos nesse ponto pode ser calculado por:

$$r_p = a - c = a - ae \Rightarrow r_p = a(1 - e)$$

- Por outro lado, o **apoastro** é o ponto em que o corpo orbitante se encontra em sua **maior distância** do corpo orbitado (localizado em um dos focos da elipse). A distância entre os corpos nesse ponto pode ser calculado por:

$$r_a = a + c = a + ae \Rightarrow r_a = a(1 + e)$$

- Já o semi latus rectum é a distância do astro orbitante ao foco em que está a massa orbitada quando a anomalia verdadeira $\theta = 90°$, logo

$$r_{sl} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos 90°} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cdot 0} \Rightarrow r_{sl} = a(1-e^2)$$

Esses 3 conceitos também se aplicam de forma análoga nos outros tipos de órbitas, porém é mais comum tratar deles em órbitas elípticas.
Obs.: Quando o astro orbitado for o Sol, você encontrará os termos **afélio** e **periélio** ao invés de apoastro e periastro. No caso da Terra, pode encontrar os termos **apogeu** e **perigeu**.

2.3 *Energia*

A energia mecânica de um sistema é de extrema relevância no estudo de órbitas, pois ela se conserva ao longo de toda a trajetória e, a partir disso, conseguimos tirar grandes conclusões!
A energia mecânica de um corpo de massa m que orbita um corpo de massa M, em que $M >> m$, pode ser dado através da soma da energia cinética $E_c = \frac{mv^2}{2}$ do corpo orbitante com sua energia potencial gravitacional $E_p = -\frac{GMm}{r}$.
Aqui, demonstraremos como determinar a energia mecânica de um corpo em órbita elíptica, sabendo apenas as massas m e M e o semi-eixo maior a da elipse:

$$E_M = E_c + E_p \Rightarrow E_M = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

Multiplicaremos a equação por r^2:

$$E_M \cdot r^2 = \frac{mv^2r^2}{2} - \frac{GMmr^2}{r} \Rightarrow E_M r^2 = \frac{m^2v^2r^2}{2m} - GMmr$$

Como o momento angular $L = mvr$, substituiremos $m^2v^2r^2$ por L^2:

$$E_M r^2 = \frac{L^2}{2m} - GMmr \Rightarrow \frac{L^2}{2m} = E_M r^2 + GMmr$$

Com isso, observamos que, como o momento angular se conserva, e a massa do corpo não se alterará, então o termo $\dfrac{L^2}{2m}$ é constante durante toda a trajetória de uma órbita elíptica, o que se dá por consequência que a quantidade $E_M r^2 + GMmr$ também é constante ao longo da órbita. Sabendo disso, igualaremos essa quantidade em dois pontos notáveis da órbita, afélio e periélio:

$$\frac{L^2}{2m} = \frac{L^2}{2m} \Rightarrow E_{Ma} r_a^2 + GMmr_a = E_{Mp} r_p^2 + GMmr_p$$

Claramente, sabemos também que a energia mecânica se conservará, logo $E_{Mp} = E_{Ma} = E_M$:

$$E_M r_a^2 + GMmr_a = E_M r_p^2 + GMmr_p \Rightarrow E_M(r_a^2 - r_p^2) = GMm(r_p - r_a)$$

$$E_M = \frac{GMm(r_p - r_a)}{(r_a^2 - r_p^2)} = \frac{GMm(r_p - r_a)}{(r_a - r_p)\cdot(r_a + r_p)} = \frac{-GMm(r_a - r_p)}{(r_a - r_p)\cdot(r_a + r_p)} = \frac{-GMm}{(r_a + r_p)}$$

Como $a = \frac{r_a + r_p}{2} \Rightarrow r_a + r_p = 2a$, então concluímos que a energia mecânica de um corpo de massa m orbitando um corpo de massa M em uma órbita elíptica é dada por:

$$\boxed{E_M = \frac{-GMm}{2a}}$$

2.4 *Velocidade*

Para encontrarmos a velocidade de um corpo que orbita uma massa M em órbita elíptica em um determinado ponto em que dista r do corpo orbitado, igualaremos a soma da energia cinética e pontecial com a energia mecânica de uma órbita elíptica que acabamos de calcular:

$$E_M = E_c + E_p \Rightarrow \frac{-GMm}{2a} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} - \frac{GM}{2a}$$

$$v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) \Rightarrow v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\boxed{v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}}$$

Essa fórmula é extremamente útil na solução de muitos problemas de astronomia, então não se esqueça dela!

2.5 *Caso particular: circunferência*

Um caso muito comum em problemas, e também muito mais simples, é o caso das órbitas circulares. Basicamente, pode-se pensar em uma circunferência como sendo uma elipse de excentricidade $e = 0$, ou seja, $c = 0$. Pela equação polar da elipse, se substituirmos e por 0:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \Rightarrow r = \frac{a(1-0)}{1+0} \Rightarrow r = a$$

Resumidamente, obeserva-se que uma circunferência é uma elipse cuja excentricidade $e = 0$, distância focal $c = 0$ $(F_1 = F_2 = C)$, e a distância em qualquer ponto da órbita ao centro dela é constante e igual ao raio R da circunferência $(a = b = r = R)$. Sabendo disso, conseguimos chegar na energia e na velocidade associada a um corpo em órbita circular:

$$E_M = \frac{-GMm}{2a}$$

como $a = R$:

$$\boxed{E_M = \frac{-GMm}{2R}}$$

Agora, para a velocidade:

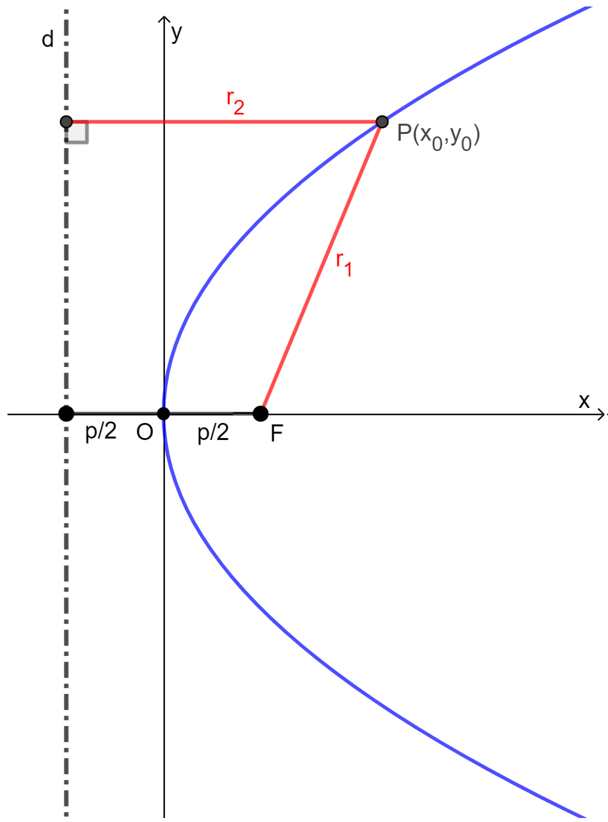
$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \Rightarrow v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R}\right)} = \sqrt{GM\left(\frac{2-1}{R}\right)}$$

$$\boxed{v_{circ} = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

3. Órbitas parabólicas

3.1 *Propriedades geométricas*

Para começar, vamos definir o que é uma parábola: Dados um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz) em um plano, com $F \notin d$, chama-se parábola o conjunto dos pontos P desse plano equidistantes de d e F. Isto é: $PF = Pd$. Para um melhor entendimento, observe a imagem abaixo, em que r_1 é a distância entre o foco e um ponto P e r_2 é a distância entre a diretriz e o ponto P.



Agora que definimos o que é uma parábola, vamos entender quais são seus elementos importantes:

- **Foco** (Ponto F)
- **Diretriz** (Reta d)
- **Parâmetro** (p): distância entre o foco e a diretriz.
- **Excentricidade** (e): razão entre as distâncias de um ponto P da parábola ao foco e à diretriz. Como essas distâncias são iguais, a excentricidade da parábola é igual a 1.

3.2 *Equações da Parábola*

Agora, vamos deduzir algumas equações da parábola. Partindo dessas propriedades, vamos descobrir qual equação descreve uma parábola no plano cartesiano. Para isso, vamos utilizar um caso simples (o caso representado na imagem acima): a parábola com foco no ponto $(\frac{p}{2},0)$ e com eixo de simetria coincidente ao eixo Ox. Tomaremos as distâncias r_1 e r_2 em relação a um ponto $P'(x{,}y)$ qualquer

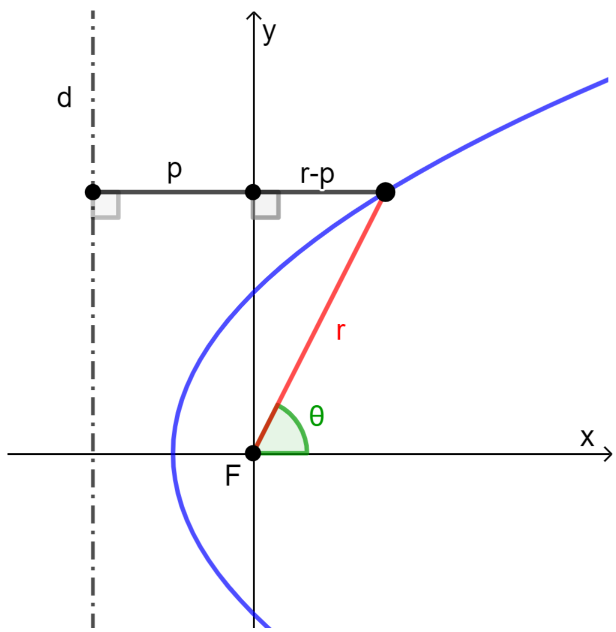
$$r_1 = r_2 \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{\left(x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 + (y-y)^2}$$

$$x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + xp + \frac{p^2}{4} \Rightarrow \boxed{y^2 = 2xp}$$

Da mesma maneira, pode-se demonstrar a equação de uma parábola com foco no ponto $(0{,}\frac{p}{2})$ e com eixo de simetria coincidente com o eixo Oy, obtendo:

$$\boxed{x^2 = 2yp}$$

Como fizemos anteriormente para a elipse, vamos agora demonstrar a equação polar da parábola, que pode eventualmente ser mais útil do que as equações anteriores na hora de resolver problemas. Para isso, vamos partir da imagem abaixo:



Analisando rapidamente, percebe-se que:

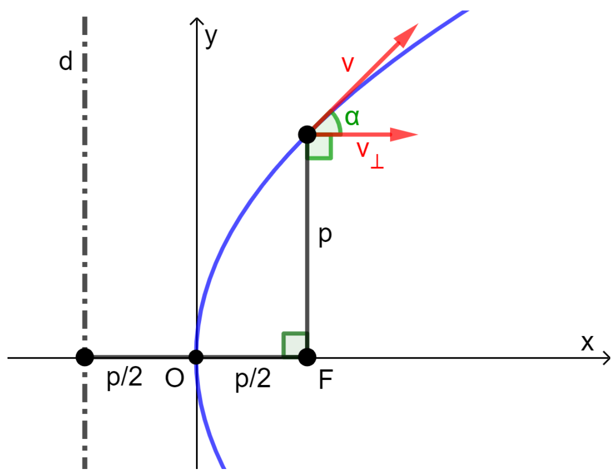
$$\cos\theta = \frac{r-p}{r} \Rightarrow r(1-\cos\theta) = p \Rightarrow \boxed{r = \frac{p}{1-\cos\theta}}$$

Aqui temos novamente aquela diferença de convenção. Você pode acabar encontrando o ângulo θ sendo considerado a partir do outro lado, ou seja, sendo suplementar ao que convencionamos. Se esse for o caso, na expressão encontrada o termo $\cos\theta$ terá sinal postivo.

3.3 Energia

Para deduzirmos a enegia associada a uma órbita parabólica, iremos utilizar o mesmo raciocínio para a órbita elíptica. Uma conclusão importante que chegamos anteriormente no desenvolvimento das equações foi que: $E_M r^2 = \dfrac{m^2v^2r^2}{2m} - GMmr$. Após isso, substituímos o termo $m^2v^2r^2$ por

L^2, mas perceba que isso só é verdade se a velocidade v do corpo em óbita for perpendicular ao vetor radial, é correto afirmar isso para o apoastro e periastro de uma óbita elíptica como fizemos, mas no caso de uma órbita parabólica não temos 2 pontos em que a velocidade do astro é perpendicular ao vetor radial, temos apenas 1 ponto (quando $r = \frac{p}{2}$). Logo, precisaremos considerar a componente perpendicular em algum outro ponto notável da órbita, sendo assim, como $L^2 = m^2 v_\perp^2 r^2 = m^2 v^2 r^2 \cdot \cos^2 \alpha$ o termo $m^2 v^2 r^2$ pode ser substituído corretamente por $\dfrac{L^2}{\cos^2 \alpha}$, em que α é o ângulo entre os vetores v e $v_\perp$. Logo, da mesma forma que fizemos para a elipse, isolamos a quantidade $\dfrac{L^2}{2m}$ e concluímos, portanto, que a quantidade $(E_M r^2 + GMmr) \cdot \cos^2 \alpha$ é constante! Agora, precisamos escolher 2 pontos diferentes da órbita parabólica para igualarmos essas quantidades. Um ponto bem trivial seria quando $r = \dfrac{p}{2}$ pois sabemos que a velocidade é perpendicular, logo $\alpha = 0$ nesse ponto. Outro ponto bem interessante é quando $r = p$. Não sabemos qual é o ângulo α de forma tão trivial, mas é possível descobrí-lo com conceitos básicos de cálculo! Basta calcularmos a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ para $x = \dfrac{p}{2}$ (pois quando $r = p \Rightarrow p = \dfrac{p}{1 - \cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90°$), e portanto a projeção ortogonal do ponto $P(x{,}y)$ é no ponto F, logo, $x = \dfrac{p}{2}$. Observe uma imagem ilustrando esse ponto abaixo:



Calculando a derivada e lembrando que ela será igual à tangente de α:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{2px}}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2x}}$$

Como $x = \dfrac{p}{2}$:

$$\tan\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 45°}$$

Com essas informações, já podemos igualar a quantidade $(E_M r^2 + GMmr) \cdot \cos^2 \alpha$ nesses 2 pontos! Assim:

$$\left(E\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{GMmp}{2}\right) \cdot \cos^2 0 = \left(Ep^2 + GMmp\right) \cdot \cos^2 45°$$

$$\frac{Ep^2}{4} + \frac{GMmp}{2} = \frac{Ep^2}{2} + \frac{GMmp}{2} \Rightarrow \frac{Ep^2}{2} - \frac{Ep^2}{4} = \frac{Ep^2}{4} = 0$$

Como $p \neq 0$, portanto:

$$\boxed{E = 0}$$

Como acabamos de deduzir que a energia mecânica de uma órbita parabólica é igual a 0, vamos analisar isso mais detalhadamente.
Como a energia mecânica é a soma da energia cinética com a energia potencial, temos que: $E_M = E_c + E_p \Rightarrow 0 = E_c + E_p \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$. Com isso, podemos perceber que se um corpo possui $E_M = 0$ no infinito (no $\lim_{r\to\infty} \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = 0 \Rightarrow v = 0$), isso significa que ele está em repouso e livre de influências gravitacionais. Em outras palavras, um corpo com $E_M = 0$ chegará no infinito com $v = 0$.
Logo, percebe-se que um corpo em órbita parabólica tem energia suficiente para "escapar"da influência gravitacional exercida pelo corpo obitado. Isso nos permite calcular a velocidade mínima necessária para que um corpo fuja completamente da atração gravitacional de outro; a essa velocidade damos o nome de **velocidade de escape** e demonstraremos ela na próxima seção:

3.4 Velocidade

Como comentado há pouco, vamos deduzir a velocidade de um corpo de massa m em uma órbita parabólica a uma distância r de uma massa M localizada no foco da parábola, em que $M >> m$, isto é, a velocidade de escape.
Como $E_M = 0$ e $E_M = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$, temos:

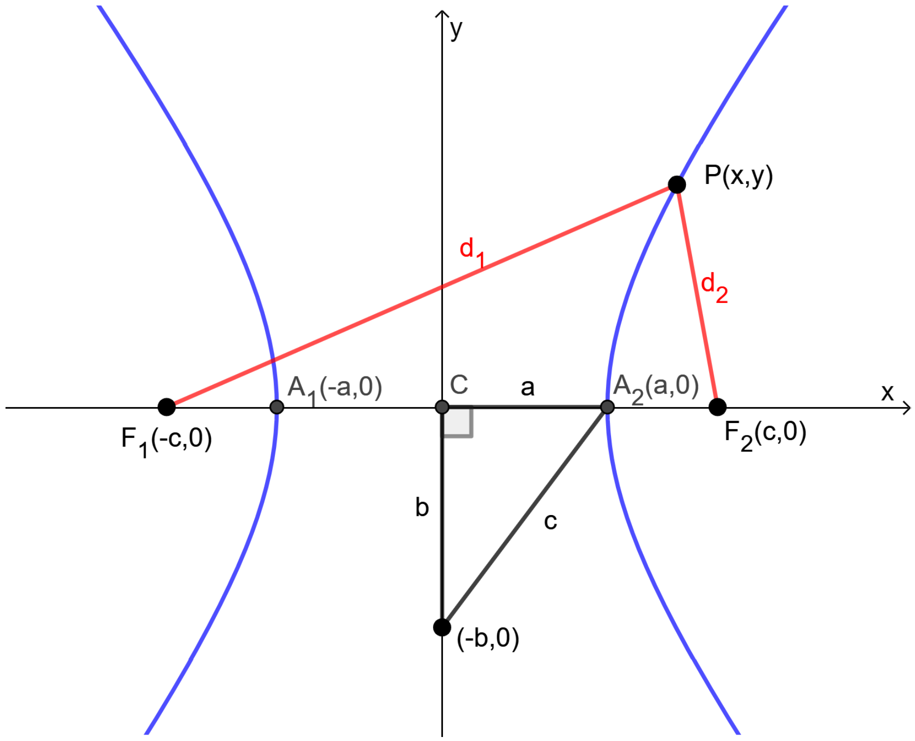
$$E_M = 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r}$$

$$\boxed{v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}\, v_{circ}}$$

4. Órbitas hiperbólicas

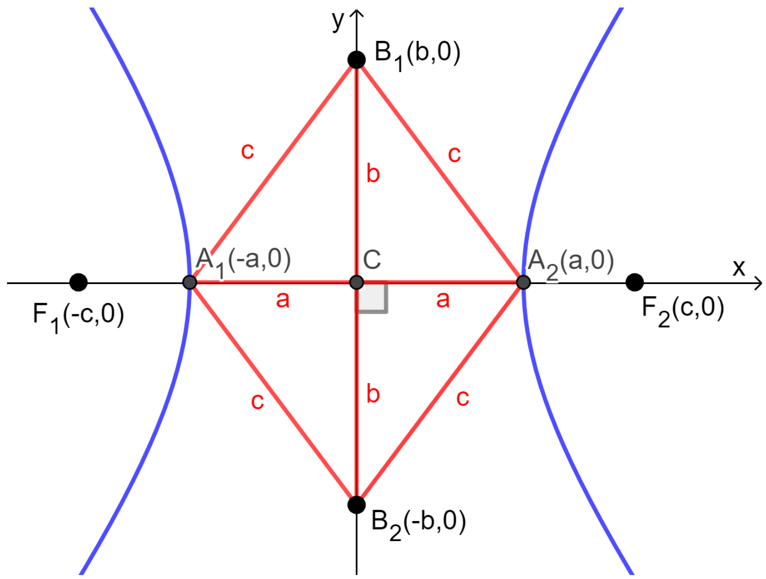
4.1 Propriedades geométricas

Definição de hipérbole: fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano α tais que $\overline{F_1F_2} = 2c$, com $c > 0$, chama-se hipérbole o conjunto dos pontos P de α cujas diferenças, em módulo, das distâncias $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ são iguais a uma constante $2a$, com $0 < 2a < 2c$, ou seja: $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$. Observe a imagem abaixo:

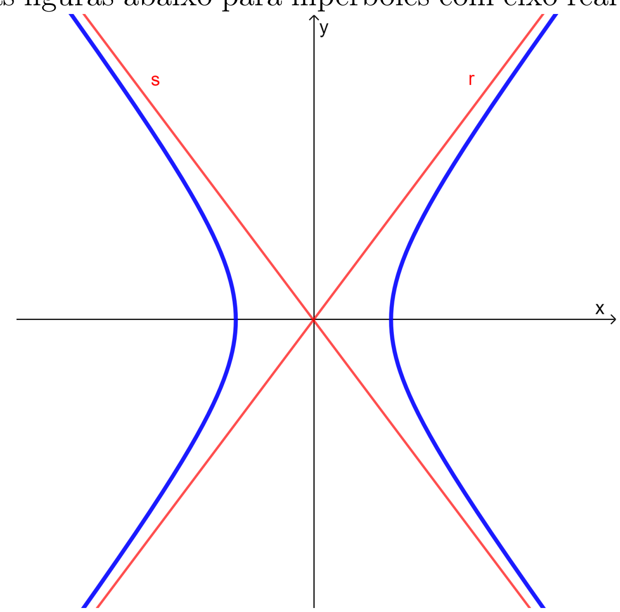


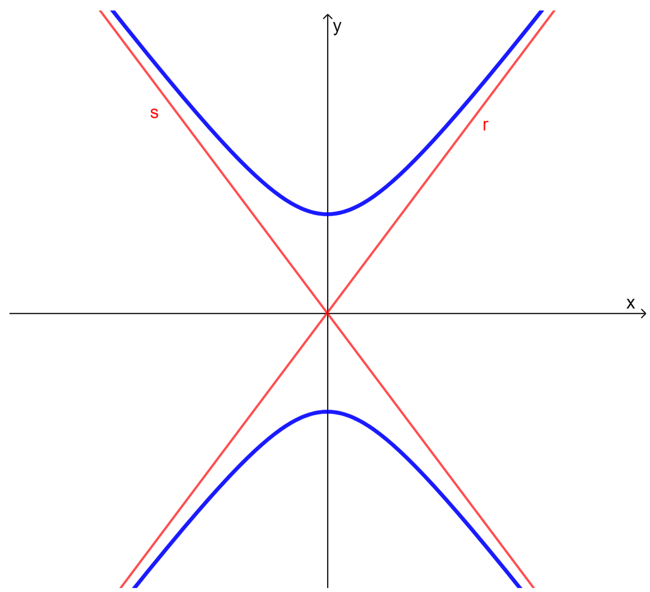
Agora que definimos o que é uma elipse, vamos entender melhor a definição de todos seus elementos importantes:

- **Focos** (Pontos F_1 e F_2)
- **Centro** (Ponto C): ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$.
- **Vértices** (Pontos A_1 e A_2): intersecção da hipérbole com o segmento $\overline{F_1F_2}$
- **Eixo real** ($2a$): segmento $\overline{A_1A_2}$
- **Eixo imaginário** ($2b$): segmento $\overline{B_1B_2}$ (ver figura abaixo)
- **Distância focal** ($2c$): distância entre os focos
- **Excentridade** (e): é a razão $e = \dfrac{c}{a}$. Observando que esse número é a razão entre a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo, nessa ordem, concluímos que $e > 1$.



Uma relação entre esses elementos é facilmente visualizada através desses 4 triângulos retângulos com catetos a e b e hipotenusa c: $c^2 = a^2 + b^2$ Outro elemento importante das hipérboles são as **assíntotas**. Elas são retas as quais os pontos da hipérbole se aproximam à medida que se percorre a hipérbole, de forma que no infinito a hipérbole tenha inclinação igual à assíntota e ela encontre a assíntota. As assíntotas podem ser descendentes (reta s) ou ascendentes (reta r), como visualizado nas figuras abaixo para hipérboles com eixo real coincidente com o eixo Ox e Oy, respectivamente:





Podemos encontrar as equações dessas retas facilmente. Basta calcularmos a derivada da hipérbole no $\lim\limits_{x \to \infty}$ para descobrirmos a inclinação das assíntotas. Assim, para a hipérbole com eixo real coincidente com o eixo Ox, veremos pelas equações da hipérbole que $y = \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - b^2}$, logo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{x \to \infty} \frac{d}{dx} \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - b^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{b^2 x}{a|b|\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Como $b > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}} = \frac{b}{a\sqrt{1-0}} = \pm\frac{b}{a}$$

Assim, concluí-se que para a hipérbole com eixo real coincidente com o eixo Ox, a equação da assíntota ascendente da é $y = \frac{b}{a}x$ e a equação da descendente é: $y = \frac{-b}{a}x$
Utilizando o mesmo raciocínio, conseguimos calcular para o caso do eixo real em Oy, temos para r: $y = \frac{a}{b}x$ e para s: $y = \frac{-a}{b}x$

4.2 Equações da Hipérbole

Agora vamos deduzir uma equação para uma hipérbole centrada na origem e com eixo real sobre o eixo Ox: Pela definição de hipérbole temos $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$, logo:

$$|\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2xc+c^2 = x^2-2xc+c^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2 \Rightarrow 4(xc-a^2) = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(xc-a^2) = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado novamente:

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Como $c^2 = a^2+b^2 \Rightarrow a^2-c^2 = -b^2$, logo temos:

$$-x^2b^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \Rightarrow x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Finalmente, dividindo ambos os lados da equação por a^2b^2, obtém-se:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

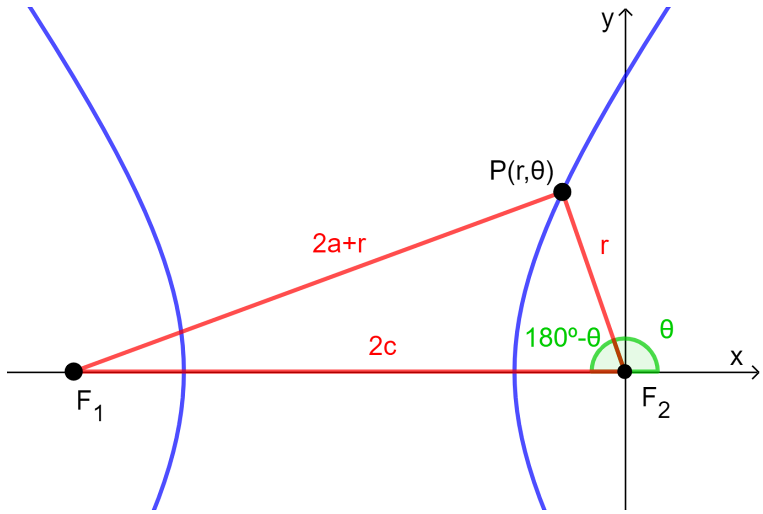
Podemos também, de maneira análoga, deduzir a equação reduzida da hipérbole para um caso mais geral em que ela possui o eixo real paralelo ao eixo Ox e centro em (x_0,y_0):

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

Da mesma forma, podemos obter a equação reduzida da hipérbole para um caso mais geral em que ela possui o eixo real paralelo ao eixo Oy e centro em (x_0, y_0):

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1}$$

Agora, vamos à equação que pode ser mais útil que essas: a equação polar da hipérbole. Para deduzí-la, a figura abaixo irá nos auxiliar.



Pela lei dos cossenos temos:

$$(2a+r)^2 = r^2 + (2c)^2 - 2r(2c)\cos(180^\circ - \theta) \Rightarrow 4a^2 + 4ar + r^2 = r^2 + 4c^2 + 4rc\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4ar = 4c^2 + 4rc\cos\theta \Rightarrow a^2 + ar = c^2 + rc\cos\theta$$

Lembrando que $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = ae$

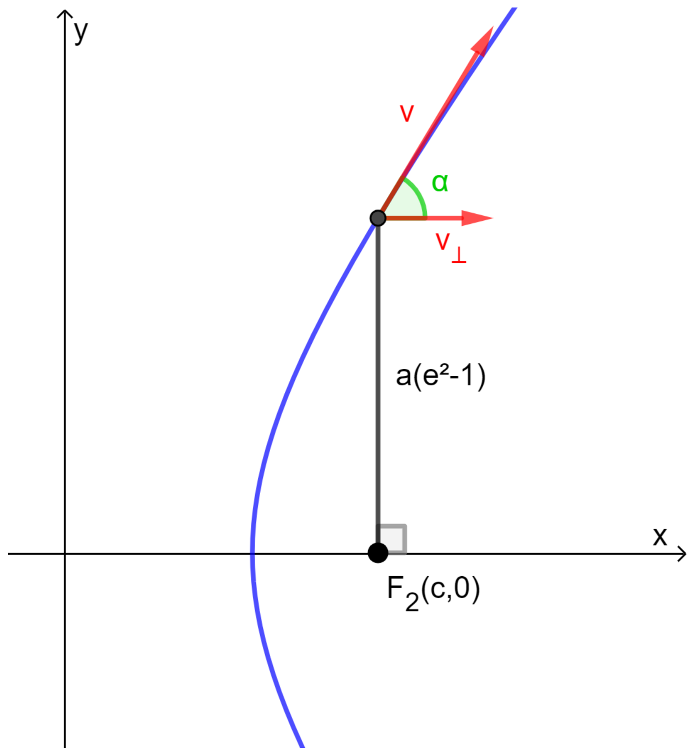
$$a^2 + ar = a^2e^2 + aer\cos\theta \Rightarrow a + r = ae^2 + er\cos\theta \Rightarrow r(1 - e\cos\theta) = a(e^2 - 1)$$

$$\boxed{r = \frac{a(e^2-1)}{1 - e\cos\theta}}$$

Novamente: atente-se à convenção dos ângulos!

4.3 Energia

Para deduzirmos a energia associada a um corpo de massa m orbitando em uma trajetória hiperbólica uma massa M, que estará localizada no foco da hipérbole, em que $M >> m$, utilizaremos o mesmo raciocínio desenvolvido na dedução da energia em órbitas parabólicas, em que concluímos que a quantidade $(E_M r^2 + GMmr) \cdot \cos^2\alpha$ é constante ao longo de toda a órbita. Assim, basta escolhermos 2 pontos favoráveis para chegarmos em uma expressão para a energia mecânica.
Um ponto bem trivial é no vértice da hipérbole, ou seja, quando $\theta = 180^\circ$ e, logo, $r = a(e-1)$. Observe também que nesse ponto a velocidade será perpendicular ao vetor radial, assim o ângulo α entre os vetores v e $v_\perp$ é igual a 0.
Outro ponto favorável, mas não tão trivial, é quando $\theta = 90^\circ$ e, portanto, $r = a(e^2-1)$. Agora, iremos calcular diretamente o $\cos^2\alpha$ através de noções básicas de cálculo e com o auxílio da imagem abaixo:



Sabemos que, como a velocidade é tangencial à trajetória, a tangente do ângulo α é igual a derivada da função y em relação a x quando $x = c$. Logo:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - b^2} = \frac{b^2x}{a|b|\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Como $b > 0$ e queremos a derivada quando $x = c$, temos:

$$\tan\alpha = \frac{bc}{a\sqrt{c^2 - a^2}} = \frac{bae}{a\sqrt{c^2 - a^2}} = \frac{be}{\sqrt{c^2 - a^2}}$$

Sabemos que $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$:

$$\tan\alpha = \frac{e\sqrt{c^2 - a^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \Rightarrow \tan\alpha = e$$

Calculando o $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = e \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = e^2 \Rightarrow 1 - \cos^2\alpha = e^2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + e^2}$$

Com isso, temos todas informações necessárias para descobrirmos a energia de uma órbita hiperbólica! Lembrando da igualdade entre as quantidades em ambos os pontos escolhidos:

$$\left(E_M r_1^2 + GMmr_1\right) \cdot \cos^2\alpha_1 = \left(E_M r_2^2 + GMmr_2\right) \cdot \cos^2\alpha_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(Ea^2(e-1)^2 + GMma(e-1)\right) = \frac{1}{1+e^2}\left(Ea^2(e^2-1)^2 + GMma(e^2-1)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+e^2)\left(Ea^2(e-1)^2 + GMma(e-1)\right)\cos^2 0 = \left(Ea^2(e^2-1)^2 + GMma(e^2-1)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ea\left((1+e^2)(e-1)^2-(e^2-1)^2\right)=GMm\left((e^2-1)-(e-1)(1+e^2)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ea=GMm\left(\frac{e^2-1-(e+e^3-1-e^2)}{e^2-2e+1+e^4-2e^3+e^2-(e^4-2e^2+1)}\right)=GMm\left(\frac{-e^3+2e^2-e}{-2e^3+4e^2-2e}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ea=GMm\left(\frac{(-e^3+2e^2-e)}{2(-e^3+2e^2-e)}\right)\Rightarrow Ea=\frac{GMm}{2}\Rightarrow$$

$$\boxed{E=\frac{GMm}{2a}}$$

Note que a energia mecânica de uma órbita hiperbólica é igual ao oposto da energia mecânica de uma órbita elíptica!

4.4 *Velocidade*

Depois dessa breve demonstração da energia, vamos calcular a velocidade de um corpo de massa m em órbita hiperbólica com uma massa M no foco, em que $M >> m$, a uma distância r do corpo orbitado.

Para isso, basta lembrarmos que a energia mecânica é igual a soma da energia cinética e potencial gravitacional, logo:

$$E_M=E_c+E_p\Rightarrow\frac{GMm}{2a}=\frac{mv^2}{2}-\frac{GMm}{r}\Rightarrow\frac{v^2}{2}=\frac{GM}{r}+\frac{GM}{2a}$$

$$v^2=2GM\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{2a}\right)\Rightarrow v^2=GM\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right)$$

$$\boxed{v=\sqrt{GM\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right)}}$$

5. Resumo características orbitais

Agora, um resumo sobre os aspectos mais importantes apresentados aqui:

	Elíptica	Parabólica	Hiperbólica
Excentricidade	$0 < e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
Equação polar	$r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$	$r = \dfrac{p}{1-\cos\theta}$	$r = \dfrac{a(e^2-1)}{1-e\cos\theta}$
Energia	$E = \dfrac{-GMm}{2a} < 0$	$E = 0$	$E = \dfrac{GMm}{2a} > 0$
Velocidade	$v = \sqrt{GM\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right)}$	$v = \sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$	$v = \sqrt{GM\left(\dfrac{2}{r}+\dfrac{1}{a}\right)}$

Tabela 1: Resumo características orbitais

Observe também que:

$$E_{elipse} < E_{parabola} < E_{hiperbole} \quad \text{e} \quad v_{elipse} < v_{parabola} < v_{hiperbole}$$

6. Problemas

Alguns dos problemas propostos aqui podem envolver o conhecimento de outros conteúdos, como as Leis de Kepler, mas nada muito complicado, o foco dos exercícios em si é geometria, energia e velocidade de órbitas. Divirta-se!

- **Constantes**
  - $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
  - $M_{sol} = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg
  - $1U.A. = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m
  - $1pc = 3{,}086 \cdot 10^{16}$ m
  - $R_T = 6{,}371 \cdot 10^{6}$ m
  - $M_T = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ Kg

Problema 1. Calcule o raio do horizonte de eventos de um buraco negro.
Nota: o horizonte de eventos delimita a região na qual um corpo precisaria ter uma velocidade $v > c$ (em que c é a velocidade da luz no vácuo) para escapar da influência gravitacional do buraco negro.

Problema 2. (IOAA 2011) Estime o número de estrelas em um aglomerado globular de $40pc$ de diâmetro se a velocidade de escape na borda do aglomerado é de 6km/s e a maioria das estrelas são similares ao Sol.

Problema 3. Suponha que você esteja navegando pelo universo quando decide medir a distância entre 2 estrelas: A_1 e A_2. Você se aproxima da A_1 de forma que seja atraído gravitacionalmente e comece a orbitá-la. Se a sua velocidade enquanto estava livre de influências gravitacionais era $V_0 = 20{,}0$km/s e no ponto de máxima aproximação com A_1 a distância até a estrela era de $d = 0{,}15$UA, calcule:

a) O formato da órbita

b) O semieixo maior (a) e a metade da distância entre os focos (c) dessa órbita.
Você esperou para tirar uma foto da estrela A_2 sempre que a distância de você até a A_1 fosse igual a c, e calculou a diferença angular entre as posições da estrela nas duas fotos com relação às estrelas distantes. Tal valor foi de $\theta = 0{,}04$".

c) Calcule a distância entre as duas estrelas.

Dados: massa de A_1 $M_{A_1} = M_{Sol}$. Considere também que A_2 está sobre a linha que liga você até A_1 durante a máxima aproximação.

Problema 4. (IOAA 2009) Um projétil inicialmente na superfície da Terra a nível do mar é lançado a uma velocidade inicial $V_0 = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T}}$ formando um ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ com o horizonte local. Ignore a resistência do ar e a rotação da Terra.

a) Mostre que a órbita do projétil é uma elipse com um semi-eixo maior $a = R_T$.

b) Calcule a maior altitude desse projétil em relação à superfície da Terra (em unidades de R_T).

c) Qual é o alcance desse projétil (distância pela superfície entre o ponto de lançamento e o ponto de queda) em unidades de R_T?

d) Qual é a excentricidade (e) dessa órbita elíptica?

e) Encontre o tempo de vôo do projétil.

Problema 5. (IOAA 2007) Um satélite orbita a Terra em uma órbita circular.O momento incial do satélite é dado pelo vetor $\vec{p}$. Em um determinado momento, uma carga explosiva é disparada que dá ao satélite um impulso adicional $\Delta\vec{p}$, de mesma magnitude que $\vec{p}$. Seja α o ângulo entre os vetores $\vec{p}$ e $\Delta\vec{p}$, e β entre o vetor radial do satélite e o vetor $\Delta\vec{p}$. Pensando na direção do impulso adicional $\Delta\vec{p}$, pondere se é possível mudar a órbita para cada um dos casos citados abaixo. Se é possível, dê os valores para α e β para os quais é possível. Se a órbita não é possível, marque NÃO.

a) uma hipérbole com perigeu no local da explosão.

b) uma parábola com perigeu no local da explosão.

c) uma elipse com perigeu no local da explosão.

d) um círculo.

e) uma elipse com apogeu no local da explosão.

Note que para $\alpha = 180°$ e $\beta = 90°$ a nova órbita será uma linha ao longo do qual o satélite cairá livremente verticalmente em direção ao centro da Terra.

7. Gabarito

Problema 1. $R = \dfrac{2GM}{c^2}$

Problema 2. $N \approx 8{,}4 \cdot 10^4$ estrelas

Problema 3. a) Hipérbole

b) $a = 2{,}217\text{UA}$ e $c = 2{,}37\text{UA}$

c) $d = 67{,}6\text{pc}$

Problema 4. a) Demonstração.

b) $h = 0{,}5R_T$

c) $A = \dfrac{2\pi}{3}R_T$

d) $e = 0{,}5$

e) $t = 55^m35.7^s$

Problema 5. a) $\alpha = [0°; 90°)$ ou $(270°; 360°]$

b) $\alpha = 90°$ ou $270°$

c) $\alpha = (90°; 120°)$ ou $(240°; 270°)$

d) $\alpha = 120°$ ou $240°$

e) $\alpha = (120°; 180°)$ ou $(180°; 240°)$