Dipolos Elétricos

Matheus Borges - Projeto Olímpicos

1. Introdução

Vamos considerar um sitema composto por duas cargas opostas $+q$ e $-q$ separadas por uma distâcia d como mostra a figura 1, esse sistema é chamado de dipolo. Aqui vamos analisar algumas características desse sistema , por exemplo, o potencial e o campo elétrico gerado por ele, como ele interage com campos externos(força e torque). Para calcular o potencial e o campo elétrico vamos restringir nossa análise para regiões muito distantes da origem ($r \gg d$). Por mais que não seja difícil calcular o pontencial e o campo para qualquer posição, não nos daria resultados tão esclarecedores, então vamos abrir mão de um pouco de precisão para ganharmos uma grande quantidade de clareza.

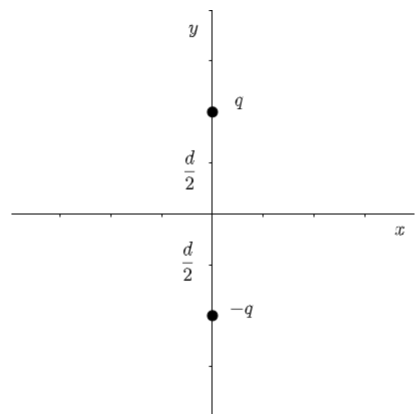

Figura 1

2. Cálculo do potencial

Sabemos que o potencial exato da configuração é

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right)$$

Pela lei dos cossenos podemos calcular r_+ e r_-

$$r_+ = r\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{2r}\right)\cos\theta}$$

$$r_- = r\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 + 2\left(\frac{d}{2r}\right)\cos\theta}$$

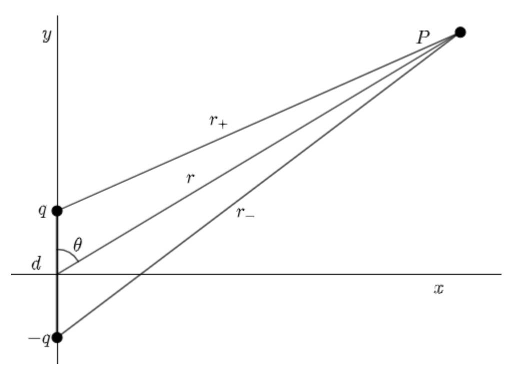

Figura 2

Como $r \gg d$ então o termo $\left(\frac{d}{2r}\right)^2$ pode ser desprezado, portanto o potencial fica

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r\sqrt{1-2\left(\frac{d}{2r}\right)\cos\theta}}-\frac{q}{r\sqrt{1+2\left(\frac{d}{2r}\right)\cos\theta}}\right]$$

Podemos usar a seguinte aproximação $(1+x)^n{\approx}(1+nx)$ para $x{\ll}1$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\left[\left(1-2\left(\frac{d}{2r}\right)\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+2\left(\frac{d}{2r}\right)\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$V{\approx}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\left[\left(1-2\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{d}{2r}\right)\cos\theta\right)-\left(1+2\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{d}{2r}\right)\cos\theta\right)\right]$$

Portanto

$$\boxed{V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}}$$

Onde $p=qd$ é chamado de momento dipolo. Então se variamos a distância d, porém mantendo o produto qd constante o potencial a grandes distancias seria o mesmo. Existe uma forma de idealizar um dipolo, de forma que a expressão para o potencial seja válida para qualquer posição, não só para grandes distâncias, se $d{\to}0$ (dessa maneira $q{\to}\infty$ para manter o produto $qd=p$) para qualquer posição poderíamos dizer que $r{\gg}d$. Essa configuração é chamada de dipolo 'puro', uma configuraçao que d não tende a 0 é chamada de dipolo 'físico'. A partir de agora vamos dar um caráter vetorial para o momento dipolo, consideramos que $\vec{p}$ é um vetor de módulo $|\vec{p}|=qd$ que aponta da carga negativa para a positiva.

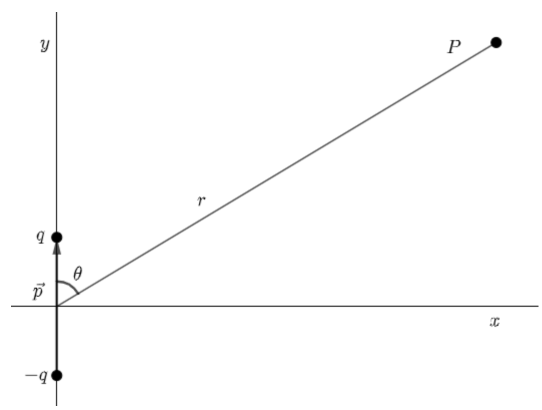

Figura 3

3. Cálculo do campo elétrico

Sabemos pela definição de potencial que

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}{\cdot}V$$

$$\vec{E}=-\left[\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta}\right]$$

Então chegamos na seguinte expressão para o campo elétrico

$$\boxed{\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta\hat{r}+sen\theta\hat{\theta}\right)}$$

A figura 4 mostra uma comparação entre as linhas de campo de um dipolo 'puro' e um dipolo 'físico'.(imagem tirada do livro "Introduction to electrodynamics/David J. Griffiths, Reed College. – Fourth edition")

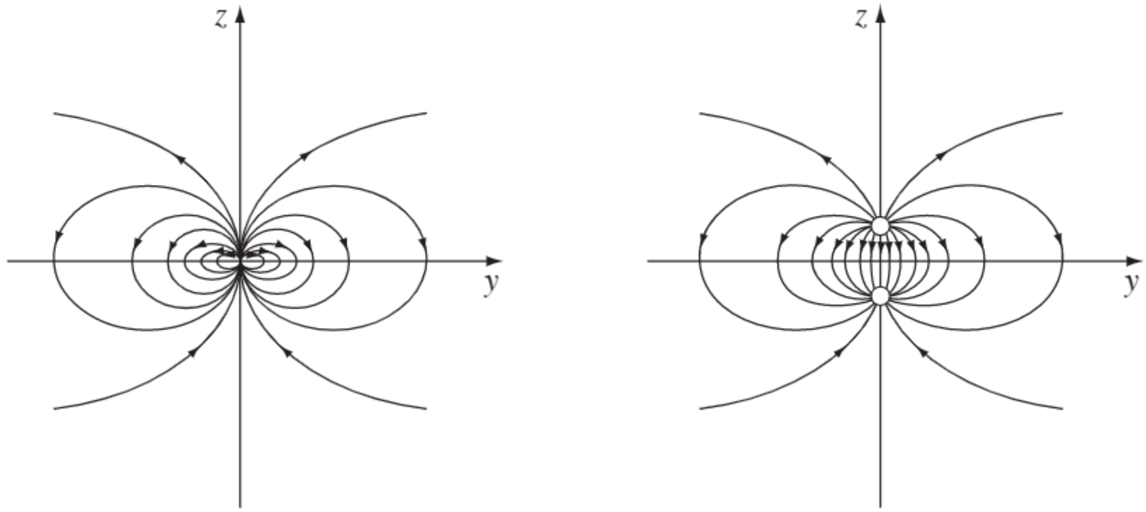

Figura 4

4. Torque e força em um dipolo

Vamos agora colocar um dipolo dentro de uma região com um campo elétrico. Se o campo elétrico for constante a força resultante será nula pois a força na extremidade positiva $F_+ = q\vec{E}$ cancela a força na extremidade negativa $F_- = -q\vec{E}$, Porém existe um toque, toque em torno do centro do dipolo é

$$\vec{\tau} = (\vec{r_+} \times \vec{F_+}) + (\vec{r_-} \times \vec{F_-})$$

$$\vec{\tau} = [(\vec{d}/2) \times (q\vec{E})] + [(-\vec{d}/2) \times (-q\vec{E})] = q\vec{d} \times \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

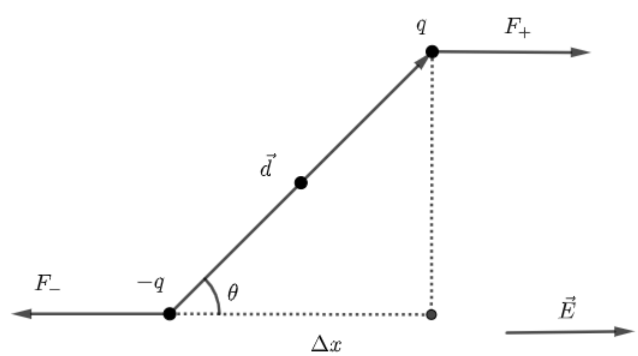

Figura 5

Podemos observar que o dipolo fica em equilíbrio quando $\vec{p}$ se alinha paralelamente ao campo $\vec{E}$. Caso o campo não seja constante temos uma força resultante agindo no dipolo, vou calcular essa força para um caso unidimencional

$$\vec{F} = q[\vec{E_+} - \vec{E_-}]$$

$$\vec{F} = q[\Delta E]\hat{x}$$

$$\vec{F} = q\left[\frac{\Delta E}{\Delta x}\right]\Delta x\hat{x}$$

Sabemos que $\Delta x = d\cos\theta$, então chegamos em

$$\vec{F} = \frac{\Delta(qEd\cos\theta)}{\Delta x}\hat{x}$$

O termo $qEd\cos\theta$ pode ser escrito como $\vec{p}\cdot\vec{E}$

$$\vec{F} = \frac{\Delta(\vec{p}\cdot\vec{E})}{\Delta x}\hat{x}$$

Para Δx pequeno, como no caso do dipolo 'puro', temos

$$\vec{F} = \frac{d(\vec{p}\cdot\vec{E})}{dx}\hat{x}$$

Podemos generalizar essa expressão para mais dimensões

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E})}$$

5. Problemas

Os problemas são divididos em simples normal difícil.(Tenha em mente que dificuldade é algo bem subjetivo!)

Problema 1. Mostre que a energia de um dipolo 'puro' $\vec{p}$ em um campo $\vec{E}$ é dada por

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

Problema 2. Determine a força entre um dipolo 'puro' $\vec{p}$ e uma carga pontual q se eles são separados por uma distância r e o vetor $\vec{p}$ é direcionado para a carga pontual.

Problema 3. Determine a força entre dois dipolos perfeitos $\vec{p_1}$ e $\vec{p_2}$ separados a uma distância d. Considere que os dipolos estão alinhados.

Problema 4. (Jaan Kalda)Estime a frequência de oscilação de uma molécula polar em um campo elétrico $E = 30kV/m$. Podemos modelar a molécula como um halter rígido de comprimento $l \approx 0.1nm$ e massa total $m = 2\times10^{-26}kg$. A magnitude das cargas $\pm q$ no átomo vale $1.6\times10^{-19}C$.

Problema 5. A figura mostra uma haste carregada de massa m, dobrada na forma de um arco de círculo de raio R. A distribuição de carga é mostrada na figura. considere que a haste é ligada ao centro de curvatura, que está preso por um pivô, por hastes isolantes.

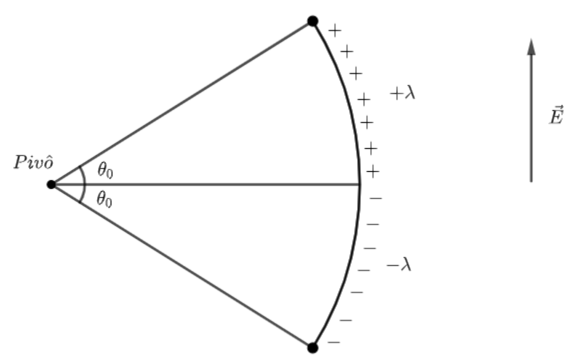

Figura 6

a) Encontre o momento dipolo total da haste.

b) Para um pequeno deslocamento angular, encontre o período de oscilação do sistema. Considere que a haste está numa região com um campo elétrico $\vec{E}$ constante.

c) Determine o trabalho para rotacionar a haste 180°.

Problema 6. (Purcell/Morin)Dois discos paralelos ambos de raio R são separados por uma distância l. As densidades superficiais de carga são σ e $-\sigma$. Qual o campo elétrico a uma grande distância r ao longo do eixo dos discos.(**dica**: trate os discos como um grande conjunto de dipolos parados um ao lado do outro)

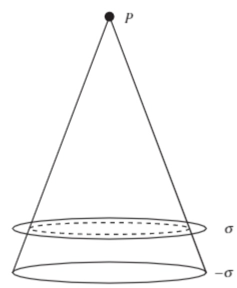

Figura 7

Problema 7. (200 puzziling problems)Uma pequena conta de massa m e carga q pode deslizar sem atrito em um fio circular isolante de raio r. Um pequeno dipolo está fixo no centro do círculo com o eixo do dipolo no plano do círculo. Inicialmente a conta esta no plano de simetria do dipolo, como mostra a figura. Considere a constante eletroestática do meio K.

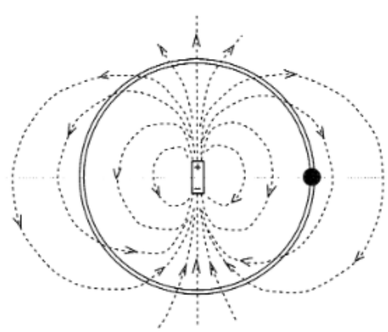

Figura 8

a) Encontre a velocidade da conta em função do ângulo.

b) Encontre a força normal exercida pelo fio na conta em função do ângulo.

c) Como seria o movimento da conta caso o fio fosse retirado?

Problema 8. (Griffiths)Um dipolo perfeito $\vec{p}$ está localizado a uma distância z acima de um plano condutor infinito. O dipolo forma um ângulo θ com a perpendicular ao plano. Encontre o torque sobre $\vec{p}$. Se o dipolo tiver rotação live, em que direção ele ficará em repouso?

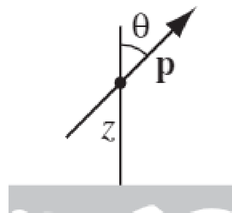

Figura 9

6. Gabarito

Problema 1. Demonstração

Problema 2. $|\vec{F}| = \dfrac{pq}{2\pi\epsilon_0 r^3}$

Problema 3. $|\vec{F}| = \dfrac{3p_1p_2}{2\pi\epsilon_0 d^4}$

Problema 4. $f \approx \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{qE}{ml}} \approx 1.6 \times 10^{10} Hz$

Problema 5. a) $|\vec{p}| = 2\lambda R^2 (1 - \cos\theta_0)$

b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2\lambda(1-\cos\theta_0)E}}$

c) $W = 4\lambda R^2 (1 - \cos\theta_0) E$

Problema 6. $|\vec{E}| = \dfrac{(\sigma\pi R^2)l}{2\pi\epsilon_0 r^3} = \dfrac{\sigma R^2 l}{2\epsilon_0 r^3}$

Problema 7. a) $v = \sqrt{\dfrac{-2Kq\cos\theta}{mr^2}}$

b) $N = 0$

c) Movimento circular

Problema 8. $|\vec{\tau}| = \dfrac{p^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{32\pi\epsilon_0 z^3}$