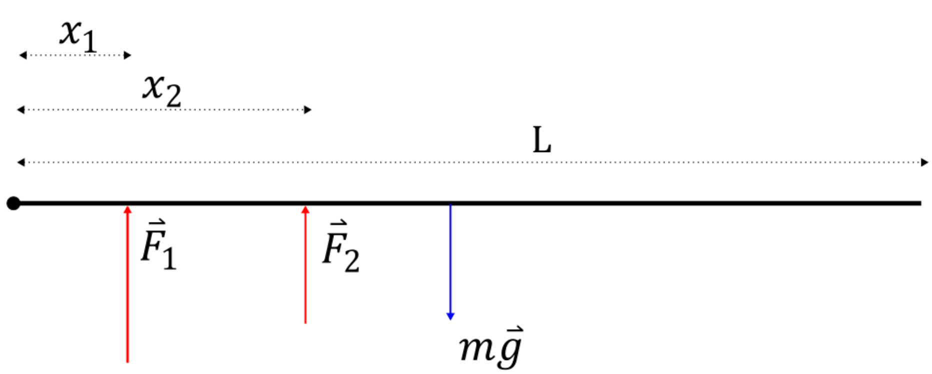
Estática

Caio Augusto - Projeto Olímpicos

1. Introdução

No curso de Leis de Newton foi apresentado como a presença de forças causa um objeto a acelerar seguindo a conhecida formula $\vec{F_r} = m\vec{a}$.(a gigantesca lei de newton), e nesse folheto nós vamos analisar o caso especifico de como forças devem interagir entre si para que um objeto se encontre "Estático"(ou seja, para que $\vec{a} = 0$)

Pra entender como funciona problemas de estática, eu vou dar um exemplo do que se pede e o que se espera em um deles: Considere que haja uma barra uniforme de comprimento L e massa m que esta sobre o efeito da gravidade $\vec{g}$; forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ atuam na barra a distancias x_1 e x_2 de um dos finais da barra. Se quisermos que nossa barra não se mova, qual deve ser a relação entre $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, x_1, x_2, m e L?



Questões de estática são basicamente isso. A questão te apresenta uma configuração com varias forças atuando em um sistema e pergunta qual é a condição pro corpo se manter em repouso.

1.1 Usando o que temos

Tentamos resolver o problema com o que temos até agora:

$\vec{F}_1$,$\vec{F}_2$ e $m\vec{g}$ são as únicas forças externas que atuam no corpo. Como o corpo precisa ter uma aceleração resultante nula em todos os seus pontos, a primeira equação que temos vem da lei de Newton:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = m\vec{a} = 0 \tag{1}$$

Agora, essa questão que eu propus pode ser geral, e as forças podem ter qualquer direção em geral, mas vamos analisar um caso mais especifico pra manter uma certa claridade: vamos assumir que tanto $\vec{g}$ quanto $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são perpendiculares a barra, onde as duas forças externas apontam na direção oposta da gravidade (como mostra a primeira imagem). Nesse caso em especifico, podemos analisar o problema com os módulos das forças, o que nos daria:

$$F_1 + F_2 = mg \tag{2}$$

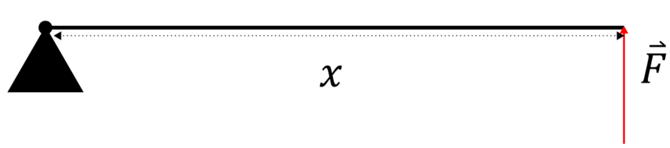
Veja que essa equação sozinha não me permite achar nem F_1 nem F_2, o que é um problema: se pensamos num caso real onde tentamos equilibrar um lápis com dois dedos, o problema é definido. Dados x_1 e x_2, as forças F_1 e F_2 são únicas, não tem como mudar qualquer uma dessas duas forças sem mudar as distancias, ou seja: Com x_1 e x_2 definidos, as duas variáveis F_1 e F_2 possuem valores definidos. Ou seja, temos duas icógnitas mas apenas uma única equação que as envolve, fica então claro que tem alguma restrição faltando que define o equilíbrio do sistema. Ou seja, temos uma equação que descreve um equilíbrio do nosso sistema mas ela não é suficiente

No caso, podemos entender a situação da seguinte maneira: a soma de forças externas nos dizem como um corpo se move no espaço num quesito translacional, mas ele não nos diz sobre a tendencia do objeto rotacionar. Falta analisar o equilíbrio rotacional do sistema: além do corpo não ter seu centro se movendo, o corpo como um todo não pode rotacionar. Isso introduz uma nova restrição ao sistema: A soma de todos os torques no sistema tem que ser zero.

2. Torque - A equação que falta

O tópico de torque sera introduzido brevemente sem uma prova matemática rigorosa; aqui eu basicamente usarei um pouco da intuição para explicar de onde ela vem, como ela é definida e como ela é usada em estática. Basicamente apenas introduzirei a outra restrição para o corpo se manter estático, mas não explicarei a fundo nada sobre rotações.

Em si, o torque de uma força é uma quantia que diz sobre o quanto ela tende a fazer um corpo rotacionar: suponha que a mesma barra rígida mencionada na introdução agora esta pivotada em um de seus vértices e aplicamos uma única força vertical F à uma distancia x do pivot, o peso da barra tende a faze-la rotacionar ao redor do pivot, e para evitar isso é necessário aplicar uma força pra mantê-la estática.



O que esta acontecendo aqui é que, ao redor do Pivot, o torque da força peso da barra se anula com o torque da força externa $\vec{F}$ que aplicamos: na medida que o peso tenta fazer a barra rotacionar ao redor do pivot no sentido horário, a força F tenta fazer a barra girar no sentido anti-horário na mesma proporção, e a barra no fim fica estática. Podemos então definir uma quantia relacionada a objetos rotacionarem: $\vec{\tau}$. Cada força produz uma quantia desse tipo, e ela diz respeito a tentativa da força fazer o corpo em que ele atua rotacionar ao redor da origem que estamos analisando.

Note que é muito importante associar essa quantia de rotação a uma origem: corpos rotacionam ao redor de um ponto, então o torque precisa sempre estar falando sobre a tendencia do corpo rotacionar ao redor desse ponto no qual falamos.
Há diversas maneiras de provar o que deveria ser essa quantia $\vec{\tau}$, mas eu vou fazer como todo bom professor de ensino fundamental e não vou mostrar prova alguma: provar isso sem usar nada de rotação é bem tenso.(Mas não deixo vocês presos a minha incapacidade de transcender; O capitulo 2 do Morin possui uma prova interessante de porque a equação de equilíbrio de torque deve ser como ela é. Nessa parte do livro, ele não apresentou nenhum conceito de rotações, então estamos no mesmo barco, por isso ver a prova la pode ser útil.)
Matematicamente, dada uma força $\vec{F}$ atuando em um ponto localizado a um vetor $\vec{r}$ da origem O que usamos de referencia, o torque que essa força produz ao redor de O é dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{3}$$

Para aqueles que já viram algo de "alavancas"no ensino fundamental, este seria o analogo do "força vezes distancia tem que ser igual dos dois lados da alavanca pra ter equilíbrio", o r estaria relacionado a "distancia"que falamos em alavancas. No entanto, aqui não temos um simples produto entre os modulo da força e o modulo da distancia; as direções da força e do local onde ela é aplicada é muito importante aqui, e é por isso que temos um produto $\times$ entre os vetores aqui. $\times$ seria o que chamamos de "produto vetorial", e eu vou explicar melhor disso na subsecção a frente.
No entanto, se olharmos para o produto vetorial como um produto normal quando os dois vetores são perpendiculares, podemos entender qualitativamente o pouco de o que o torque significa. Nessa formula, quanto maior a distancia da origem O, maior é o torque que uma força exerce. Analogamente, quanto mais longe da origem a força F é aplicada, menor ela tem que ser para manter a barra em equilíbrio.(O que faz sentido, sempre que você vai brincar na gangorra com seu amigo 3 vezes mais pesado que você, mais próximo do ponto fixo ele pode ficar pra que vocês dois se equilibrem)

Entendido o que deveria ser essa quantia de rotação (embora sem uma prova com muito rigor matematico), podemos aferir que a outra condição para que o sistema não acelere de maneira alguma é que, ao redor de uma origem O que escolhemos para analisar nosso sistema:

$$\sum \vec{\tau} = \sum (\vec{r_i} \times \vec{F_i}) = 0 \tag{4}$$

Onde $\vec{F_i}$ são as forças que atuam no sistema e $\vec{r_i}$ é o vetor posição de aplicação da força em relação a uma origem O.

Note que O foi apontado como a origem ao qual o torque é calculado, mas até certo ponto, ele é bem arbitrário: no nosso problema, eu podia ter falado que O era o pivot da barra, podia falar que é no centro da barra, ou podia falar que era o ponto onde você aplica a força F, todos ainda teriam torque resultante nulo. Isso de certo modo não é intuitivo: falamos que o torque resultante ao redor de O deve ser zero, mas O nem é um ponto definido, então como isso faz sentido?

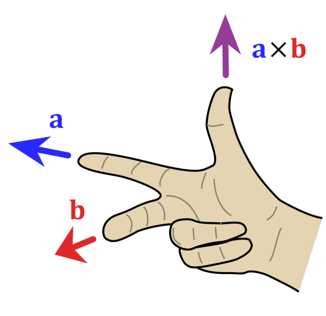
O fato é que, se um conjunto de forças $\vec{F_i}$ aplicadas em $\vec{r_i}$ ao redor de uma origem O tem $\sum_i \vec{F_i} = 0$, então a quantia $\sum Vecr_i \times \vec{F_i}$ não muda se você mudar a origem. Eu deixo isso como exercício no fim do folheto, mas acho que da pra ver isso até que intuitivamente: se eu calculasse os torques de cada força ao redor do pivot da barra, então teria o torque da força F e o torque da força peso se anulando; a medida que eu mudo a minha origem para pontos mais a direita da barra, o torque da força F diminui, mas o torque da Normal exercida no pivot começa a aumentar, e juntos, eles conseguem sempre ser iguais ao torque do peso, independente de qual ponto eu uso como origem pra calcular essas quantias de torque.
Mas agora eu vou parar de não explicar as coisas e vou tentar introduzir de maneira simplificada o que seria o Produto Vetorial essencialmente.

2.1 Produto Vetorial

Para aqueles que já estão familiarizados com produto vetorial, essa subseção pode ser pulada sem muitos problemas.
O Produto vetorial é uma forma de transformação entre dois vetores. Você pega dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, aplica o produto vetorial e tem como resultado um outro $\vec{C}$, tal que

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

Não precisamos entender muito sobre como C é obtido com rigorosidade matemática(porque isso envolve matrizes e determinantes, o que é um saco). Precisamos apenas saber que, para qualquer vetor A e B, o vetor $\vec{C}$ é sempre perpendicular a $\vec{A}$ e $\vec{B}$ de seguindo a regra da mão direita.



Se você pegar sua mão direita(sempre a direita, se pegar a mão esquerda as direções dos produtos vetoriais vão estar sempre invertido) colocar o dedo indicador apontando na direção de A e o dedo do meio apontando na direção de B, o polegar vai ta apontando na direção de C. Você não precisa se perguntar porque isso é verdade: faz parte da definição de produto vetorial, sempre quando um vetor A se transforma vetorialmente com B, a direção resultante é sempre obedecida pela regra da mão direita.

É importante ressaltar que o produto vetorial importa a ordem como os fatores são apresentados, isto é:

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

O dedo indicador da mão direita sempre tem que ficar paralelo ao primeiro vetor que aparece no produto, e com isso em mente da pra mostra que

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Agora o modulo de $\vec{C}$ segue também uma regra advinda dos nossos grandes matemáticos (que também não precisamos entender porque é verdade): Se o angulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é θ, então

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin(\theta)$$

Isso significa que se A e B são paralelos, seu produto vetorial é zero.

Da pra entender isso no nosso caso do torque: O torque de uma força é dada pelo produto vetorial do vetor do ponto aplicado com o vetor força,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Então se a força for paralela ao vetor posição, o torque é nulo, e realmente, não tem como fazer um lápis rotacionar pressionando ele contra o chão com uma força paralela ao eixo do lápis.

Figura 1: Uma força F sendo aplicada na barra, quando a força é paralela a direção da barra, é intuitivo que a barra não rotaciona

Então basicamente o produto vetorial é uma transformação entre dois vetores da um novo vetor perpendicular a eles cujo modulo é igual ao produto dos módulos vezes o seno do angulo que os vetores fazem. Com isso em mente, o torque em uma direção diz respeito a tendencia do objeto rotacionar ao redor dessa direção(tudo seguindo a regra da mão direita), então para calcular o torque resultante de uma força no sistema, veja o angulo que o vetor posição e o vetor força fazer e aplica a regra da mão direita pra saber a direção.

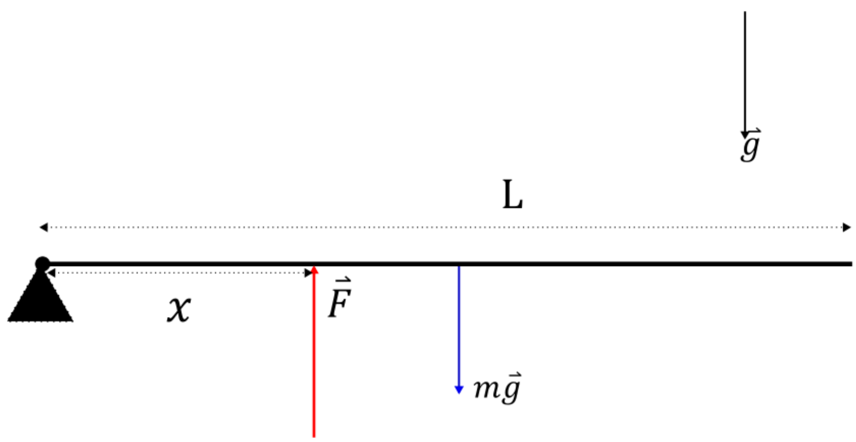
Foi bastaaante coisa jogada de uma vez só e o torque nem foi apresentado uma explicação razoável de porque ele tem q ser zero, então na parte seguinte eu vou dar uma ideia de como esses conceitos são usados.

3. Exercícios resolvidos

Aqui eu vou resolver alguns problemas de estática pra dar uma ideia de como os conceitos de torque são usados, aqueles que já se sentem confiantes sobre o assunto podem sem problema pular essa seção e seguir adiante

3.1 Barra pivotada

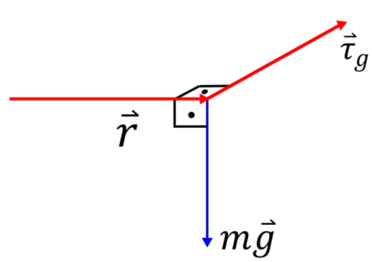
Temos uma barra uniforme de comprimento L de massa m que esta na horizontal apoiada sobre um pivot em um de seus extremos. Se uma força F é aplicada a uma distancia x do pivot na direção contraria a gravidade, qual deve ser o valor de F para que a barra se mantenha em equilibro?



Na aula de corpos rígidos é mostrado que o torque de uma força constante em um corpo rígido é calculado como se a força total atuasse no centro de massa no sistema, ou seja: o peso da barra exerce um torque em seu centro, a uma distância L/2 do pivot. e a barra esta perpendicular a força peso, então o modulo do torque do peso usando o pivot como origem é:

$$|\vec{\tau_g}| = \frac{mgL}{2} \tag{5}$$

Para saber a direção do torque, o valor de $\vec{r}$ aponta do pivot até metade da barra, e a força aponta para baixo, então pela regra da mão direita o torque do peso $\vec{\tau_g}$ aponta para dentro da folha



É bom conseguir descrever o torque como um vetor, então definimos a direção que aponta para dentro da folha como $\hat{\mathbf{k}}$ e então temos:

$$\vec{\tau_g} = \frac{mgL}{2}\hat{\mathbf{k}}$$

Analogamente, a força F é exercida a uma distancia x da origem O escolhida como o pivot, e a força é perpendicular a barra, então o modulo do torque da força F ao redor da mesma origem é dado por:

$$|\vec{\tau_F}| = Fx \tag{6}$$

a direção do torque pode ser encontrado novamente pela regra da mão direita e pela definição de torque, de modo que agora temos:

$$\vec{\tau_F} = -Fx\hat{\mathbf{k}}$$

o equilíbrio dos torques exige que:

$$\vec{\tau_g} + \vec{\tau_F} = 0$$

Então chegamos que:

$$F = \frac{mgL}{2x}$$

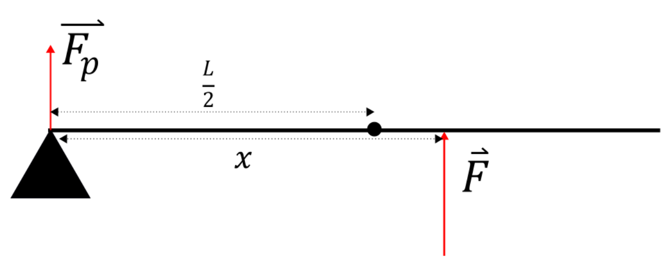
Mas o que acontece se usarmos o centro da barra como origem? A força da gravidade teria então um torque nulo mas o da força F não, o que esta de errado?

O erro esta em desconsiderar uma outra força que atua no sistema: O Pivot também exerce uma força para manter o equilíbrio na barra, e ao trocar a origem o torque que este exerce se torna não nulo. Vamos ser quantitativos em relação a isso:

A força que o pivot exerce de ser

$$F_p = mg - F \tag{7}$$

apontando para cima, pois a força total exercida na barra deve ser nula. O torque que a força F exerce agora muda pois ela atua em um ponto à uma distancia $x - L/2$ da origem escolhida.



A força $\vec{F_p}$ aponta para cima, e o Pivot é o centro da barra, então $\vec{r_p}$ aponta para direita, e a regra da mão direita nos da então:

$$\vec{\tau_P} = \frac{F_p \cdot L}{2}\hat{\mathbf{k}}$$

E dessa vez temos que

$$\vec{\tau_F} = -F(x - \frac{L}{2})\hat{\mathbf{k}}$$

e novamente a condição de torque nulo nos da que:

$$\vec{\tau_g} + \vec{\tau_F} = 0$$

$$F_p \frac{L}{2} = F(x - \frac{L}{2}) \tag{8}$$

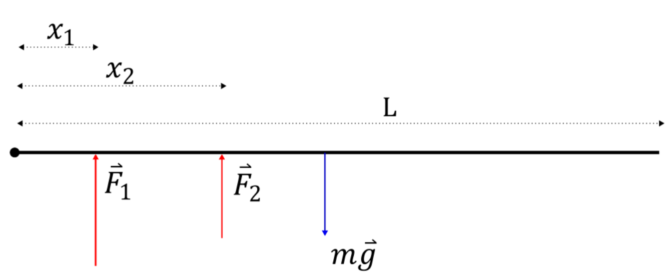
O qual, expandindo F_p, temos então

$$F = \frac{mgL}{2x} \tag{9}$$

O qual é a mesma coisa que obtemos antes, como esperado, pois a física não muda só porque eu troquei de origem para analisar o torque.

3.2 Barra Livre- Questão inicial

Temos uma barra rígida uniforme de comprimento L de massa m que esta na horizontal sob efeito gravitacional na vertical, a mesma é mantida em equilíbrio pela aplicação de duas forças F_1 e F_2, atuando a distancias x_1 e x_2 de um dos extremos da barra em direção contraria a vertical (semelhante ao que foi apresentado na introdução), queremos saber quanto deve ser F_1 e F_2 dados x_1 e x_2.



A primeira equação nós ja obtemos e diz respeito a resultante nula das forças:

$$F_1 + F_2 = mg \tag{10}$$

Também sabemos agora que a soma dos torques deve ser nulo, e qualquer ponto pode ser usado como origem O, mas como foi dado os valores das distancias em relação a um dos finais da barra, é conveniente usa-lo como origem para calcular o torque. Aplicando a regra da mão direita pra saber a direção do torque e vendo que as forças são totalmente perpendiculares aos vetores do ponto de atuação, chegamos que:

$$F_1x_1 + F_2x_2 = \frac{mgL}{2} \tag{11}$$

Temos duas equações, e duas icógnitas, F_1 e F_2, então resolvemos o problema, isolando-as temos que:

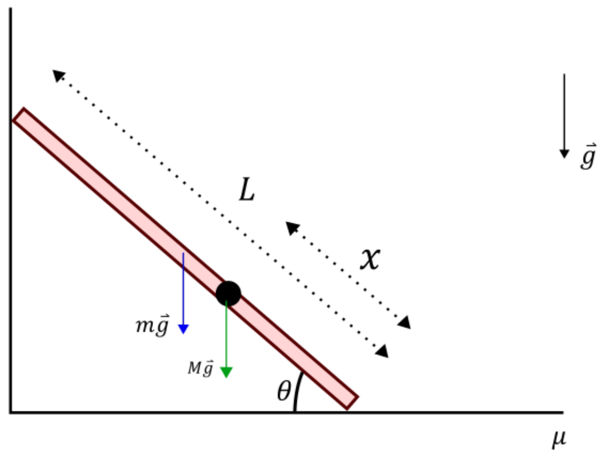
$$F_1 = \frac{mg(\frac{L}{2} - x_2)}{x_1 - x_2} \tag{12}$$

e

$$F_2 = \frac{mg(\frac{L}{2} - x_1)}{x_2 - x_1} \tag{13}$$

3.3 *Escada na parede*

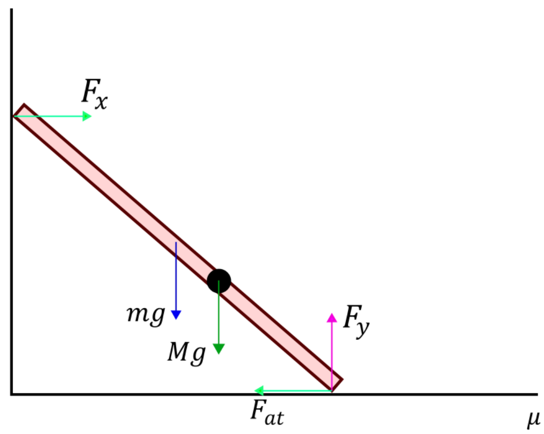
Esse aqui sera o ultimo exercício resolvido e é um clássico dos problemas de estática: Uma escada de massa m e comprimento l esta em um chão com um coeficiente de atrito μ e é posta a uma parede lisa com uma inclinação θ com a horizontal. Um pedreiro de massa M planeja subir a escada, Quando ele esta a uma distancia x do vértice no chão, qual deve ser a força de atrito no chão para que o sistema se mantenha em equilíbrio? e com isso, qual o máximo valor de x para o qual o sistema consegue se manter em equilíbrio



Há diversos dados na questão, a primeira coisa que deve ser analisado é: Quantas e quais forças atuam no sistema? Analisando a configuração é possivel perceber que sobre a escada atuam 5 forças: As duas forças peso (mg e Mg), uma força normal vindo da parede vertical (ao qual chamamos de F_x), uma força normal vindo do chão (ao qual chamamos de F_y) e uma força de atrito vindo do chão (F_{at}).

A direção das primeiras 4 forças são fáceis de ser achadas, mas a direção do atrito nem sempre é algo óbvio, nesse caso podemos acha-la de dois jeitos, o primeiro parte da intuição: Se não houvesse atrito, é intuitivo ver que a barra escorregaria para a direita, e a força de atrito aponta na direção contraria a tendencia de movimento, então F_{at} aponta para esquerda. O segundo é uma regra mais geral quando a intuição não esta ajudando: Assume uma direção qualquer, seja esquerda ou seja direita, e resolva as equações de equilíbrio. Se no fim F_{at} der negativo, significa que na verdade ela aponta na direção contraria a o que estabelecemos.

De qualquer jeito, assumiremos então que F_{at} aponta para a direita, o que nos da o sistema de forças abaixo:



Para o sistema estar em equilíbrio, a soma das forças e dos torques vetorialmente deve ser nulo. O equilíbrio na horizontal nos da que:

$$F_x = F_{at}$$

E o equilibrio na vertical nos da que

$$F_y = Mg + mg$$

A outra equação que temos é o equilíbrio dos torques, e como origem escolhemos o ponto da escada que toca o chão, e então calculamos o torque de cada força:

$$\vec{\tau_y} = \vec{\tau_{at}} = 0$$

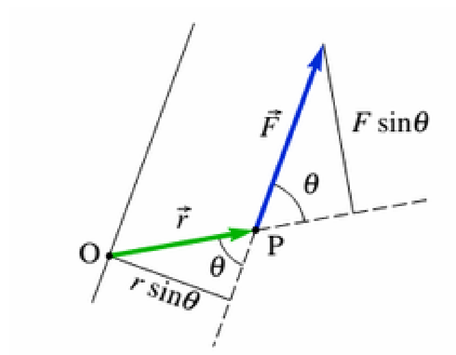
As outras forças agora não atuam a 90º da linha que parte da origem ao ponto de aplicação, então o modulo não seria apenas o produto da distância pela força. Há varias maneiras de calcular esse torque, a mais direta é usando a definição do modulo do torque e calculando o angulo entre a força e o vetor do ponto de aplicação, isso nos daria que(definindo a direção $\hat{\mathbf{k}}$ apontando para dentro da pagina):

$$\vec{\tau_x} = (F_x \cdot L \cdot \sin\theta)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\tau_M} = -(Mg\frac{L}{2}\cos\theta)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\tau_M} = -(mg\frac{L}{2}\cos\theta)\hat{\mathbf{k}}$$

Outra maneira, que as vezes é mais intuitivo do que achar o angulo é usar o fato que $rsin\theta$ é a menor distancia que a linha que representa a força tem com a origem O, isso pode ser visto geometricamente na imagem debaixo:



Usar isso é bem útil as vezes porque essa distancia é um quesito geométrico, de modo que a distância miníma que a linha do vetor de F_x faz com O é $Lsin\theta$(olha a imagem que mostra graficamente o $r\sin\theta$ pra ver se fica claro isso). Então $\vec{\tau_x} = (F_x \cdot L \cdot \sin\theta)\hat{\mathbf{k}}$ o que esta de acordo com o que conseguimos anteriormente. A soma dos torques tem que ser zero, de modo que:

$$F_x \cdot L\sin\theta = mg\frac{L}{2}\cos\theta + Mgx\cos\theta$$

Então:

$$F_x = \frac{1}{\tan\theta}(\frac{mg}{2} + \frac{Mgx}{L})$$

E como $F_x = F_{at}$, segue que:

$$F_{at} = \frac{1}{\tan\theta}(\frac{mg}{2} + \frac{Mgx}{L})$$

A condição para o qual o sistema consegue manter essa configuração é que a força de atrito consiga realmente atingir esse valor, mas é sabido que

$$F_{at} \leq \mu \cdot N$$

No nosso sistema, $N = F_y$, então a força critica de atrito é:

$$F_{at} = \mu \cdot (Mg + mg)$$

Substituindo F_{at} pelo que obtemos inicialmente, podemos achar o valor máximo de x ao qual o sistema pode se manter em equilíbrio (o qual eu não escrevo a resposta aqui porque é meio grande o resultado de X_c, mas é só substituir os valores e isolar x), e então resolvemos o problema.

4. Regra geral para resolução de exercícios

Não tem muito segredo em questões de estática, o sistema obedece duas regras:

$$\sum(\vec{F_i}) = 0 \tag{14}$$

e

$$\sum(\vec{r_i} \times \vec{F_i}) = 0 \tag{15}$$

O qual pode parecer que se trata de apenas duas equações que relacionam as variáveis, mas não é o caso: a soma vetorial das forças ser zero incita que a soma de cada componente deve ser zero. Ou seja, definindo os eixos cartesianos x, y e z de forma um tanto quanto arbitraria, a soma das forças paralelas a cada eixo deve ser zero, o que em si nos da 3 equações sobre forças. Geralmente, no entanto, os problemas de equilíbrio são 2d, então, na maioria dos casos, o equilíbrio de forças nos da apenas duas equações.

Analogamente, o torque também é um vetor que tem 3 direções, então o seu valor ser nulo nos da também 3 equações, mas, novamente, a maioria dos problemas é 2d, então qualquer rotação só pode acontecer dentro de um plano, o que nos da que apenas uma componente do torque não seria nula por 'obviedade', então realmente só teríamos uma equação vindo do torque.

A regra pra resolver problemas de estática é então: Analise todas as forças que atuam no sistema, desenhe seus vetores, componentes em x e y(o qual, ou você define como lhe convém para fazer os cálculos, ou o exercício pediu o valor de uma componente especifica), veja o torque que cada força gera e estabeleça o equilíbrio de forças e torque. Há apenas um ponto que eu sinto que vale a pena se tocar:

4.1 O que precisa ter torque nulo?

Em si, podemos ter um sistema formados por vários sistemas separados que não formam um mesmo corpo, e queremos que tudo esteja estático, mas temos que perceber algo: Torque aplicado em um corpo rigido diz respeito unicamente a rotação desse corpo rigido.
Pondo de maneira melhor: Supõe que eu tenho uma roda do meu lado e uma barra de ferro a 300km de distancia de mim e da roda. Supõe também que eu quero rotacionar a roda que esta no chão; para isso, eu vou aplicar um torque $\vec{\tau}$ na roda ao redor de uma origem O que eu escolho, mas o que acontece se eu aplicar um mesmo torque ao redor da mesma origem, só que agora na barra de ferro que esta a 300 km de distancia da minha roda? Obviamente, a roda não vai rotacionar.

No entanto, note que a quantia torque aplicada no meu sistema "Roda+Barra"é a mesma, e mesmo assim o resultado é totalmente diferente.
O ponto é que cada corpo rígido tem a sua equação de torque, e analisar o torque atuando num sistema completo pode não nos dar o insight completo da situação: sabendo apenas o torque atuando no sistema Roda+Barra, eu nunca saberia se a minha roda ta girando ou não.
Numa questão de estática, cada corpo rígido sozinho precisa ter o torque atuando nele sendo nulo, e isso é importante pra questões que envolvem vários objetos: No caso de uma sistema estático "Roda+Barra"sofrendo forças, eu poderia usar que "O torque no sistema Roda+Barra precisa ser nulo", mas isso não é o único fato que temos, a realidade é que tanto o sistema Roda quanto o sistema Barra separados precisam ter torque nulo, e perceber isso é essencial em problemas de estática mais complicados.

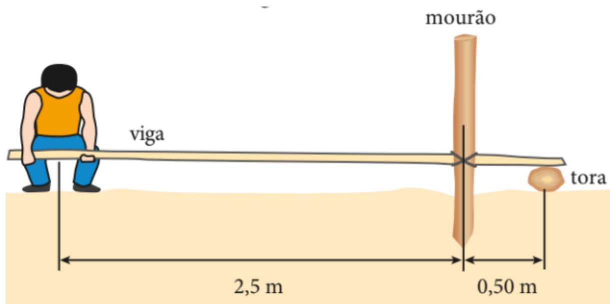
4.2 Mais incógnitas do que equações

Na ultima questão dos exercícios resolvidos, foi assumido que a parede vertical é lisa, de forma que ela não causa uma força de atrito, mas e se esse não fosse o caso? você pode tentar esse novo problema resolver na mão, dessa vez adicionando uma força de atrito na parede vertical, mas você se deparará com o fato que há mais incógnitas do que equações(o numero de equações não muda, mas uma incógnita a mais é adicionada, então algo fica faltando ai), e você pode chegar a conclusão que talvez esteja faltando mais uma equação, mas esse não é caso: é possível que nosso equilíbrio possua mais incógnitas do que temos de equação. Isso não significa que a física explodiu, mas sim que varias configurações diferentes de força podem garantir o equilíbrio, e, ou é realmente impossível de resolver porque não há um valor especifico pras incógnitas, ou é dado alguma informação a mais para resolver, provavelmente uma relação entre as forças que diz respeito a como essas forças estão atuando ou em qual estado o sistema esta.

5. Problemas

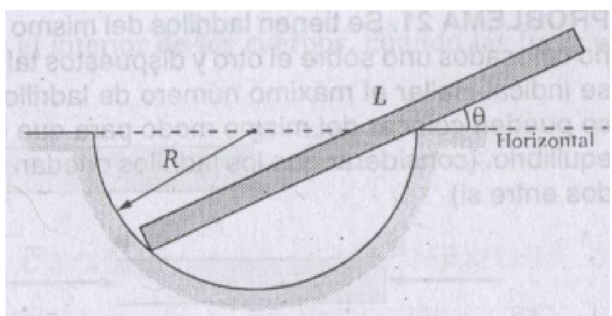
Problema 1. Prove que se um conjunto de forças $\vec{F_i}$ atuam em um sistema de modo que a resultante é nula , o valor do torque $\vec{\tau} = \sum \vec{r_i} \times \vec{F_i}$ independe da origem escolhida para calcula-lo (Dica: mudar a origem de O a O', conectados por um vetor $\vec{r_0}$ pode ser entendido como adicionando um vetor $\vec{r_0}$ a todos os vetores $\vec{r_i}$, de modo que ao trocar a origem, $\vec{r_i'} = \vec{r_0} + \vec{r_i}$; na nova somatória, $\vec{r_0}$ é constante e $\sum \vec{F_i} = 0$, e podemos abrir a nova quantia de torque em duas somatórias diferentes)

Problema 2. (Tópicos de Física) Suponha que, para arrancar um mourão fincado no chão, um homem, puxando -o diretamente com as mãos, tivesse de exercer nele uma força de intensidade 1800 N, no mínimo. Observe a figura:



Usando uma viga amarrada no mourão e apoiada em uma tora, como indica a figura, determine a mínima intensidade da força que o homem precisa exercer na viga para arrancar o mourão. Para simplificar, desconsidere o peso da viga e suponha que a força total exercida nela pelo homem esteja aplicada no ponto médio entre suas mãos.

Problema 3. A figura indica uma superfície semicircular lisa de raio R onde repousa uma barra homogênea de comprimento L. Nestas condições, podemos afirmar corretamente que o ângulo θ para a condição de equilíbrio da referida barra vale:



a) $\theta = arcsin\left(\frac{L+\sqrt{L^2+128R^2}}{64R}\right)$

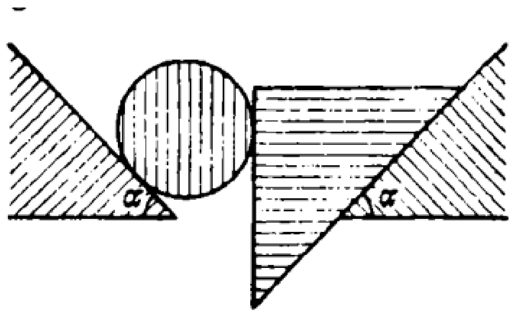
b) $\theta = arccos\left(\frac{L+\sqrt{L^2+128R^2}}{16R}\right)$

c) $\theta = arcsec\left(\frac{L+\sqrt{L^2+128R^2}}{16R}\right)$

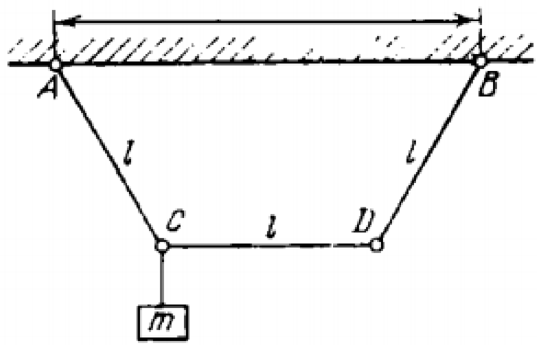
d) $\theta = arcsin\left(\frac{L+\sqrt{L^2+128R^2}}{32R}\right)$

e) $\theta = arctan\left(\frac{L+\sqrt{L^2+128R^2}}{32R}\right)$

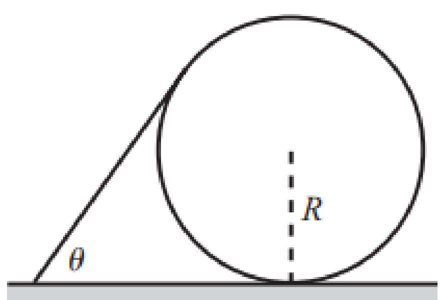
Problema 4. (Krotov) Um cilindro e uma cunha com uma face na vertical estão se tocando e estão em equilíbrio em dois planos inclinados com o mesmo angulo α com a horizontal, se a massa do cilindro e da cunha são m_1 e m_2 respectivamente, e negligenciando qualquer força de atrito no sistema, qual é a força normal entre os dois?



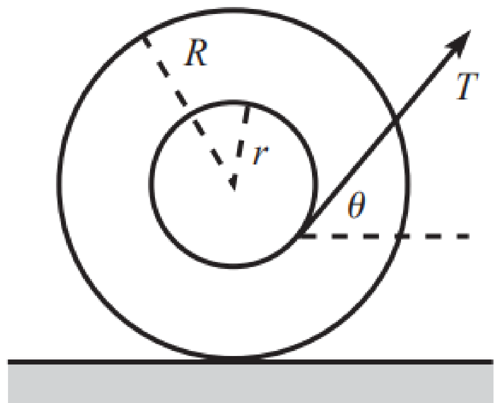
Problema 5. (Krotov) 2 barras de massa desprezível e comprimento l são conectas ao teto nos pontos A e B que estão na mesma horizontal separados por uma distancia 2l e nos seus outros extremos, C e D, é colocada uma outra barra idêntica ficando na horizontal. uma massa m é colocada no ponto C, qual é o valor da forma miníma aplicada no ponto D pelo qual a barra do meio se mantém horizontal?



Problema 6. (Morin) Um bastão de massa por unidade de comprimento ρ repousa em equilíbrio em um circulo de raio R, o bastão faz um angulo θ com a horizontal e tangencia o circulo. Há atrito em todos os pontos de contato e tem valores que garantem o equilíbrio do sistema, qual é a força de atrito do circulo com o chão?



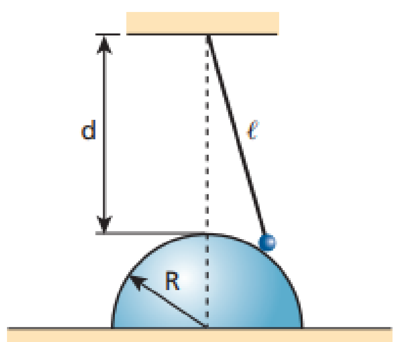
Problema 7. (Morin) Um carretel consiste em um eixo de raio re um círculo externo de raio R que rola no solo. Uma linha é enrolada em torno do eixo e é puxada com tensão T em um ângulo θ com a horizontal



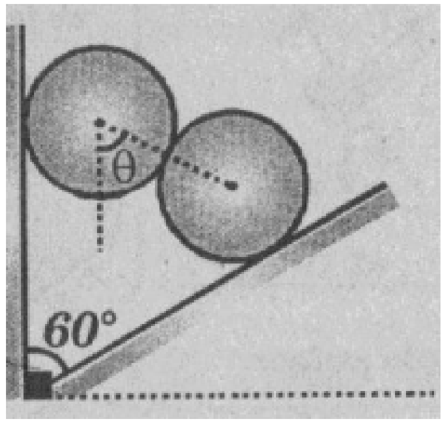
a) Dados R e r, o que θ deve ser para que o carretel não se mova? Suponha que o atrito entre o carretel e o solo seja grande o suficiente para que o carretel não escorregue.

b) Dado R, r, e o coeficiente de atrito μ entre o carretel e o solo, qual é o maior valor de T para o qual o carretel permanece em repouso?

Problema 8. (Tópicos de Fisica) Uma bolinha de aço, de peso P, encontra -se em repouso presa em um fio suposto ideal, de comprimento l e apoiada em um hemisfério fixo de raio R, praticamente sem atrito. Sendo d a distância do polo do hemisfério ao ponto de suspensão do fio, determine a intensidade da força de tração exercida pelo fio em função de P, l, d e R.



Problema 9. Na figura indicada a seguir os cilindros são idênticos e estão em equilíbrio. Desprezando possíveis forças de atrito, o valor de θ é:



a) $\theta = \arcsin\left(4\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$

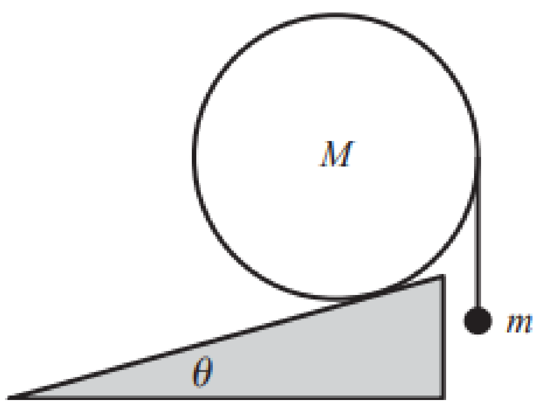
b) $\theta = \arccos\left(2\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$

c) $\theta = \text{arcsec}\left(4\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

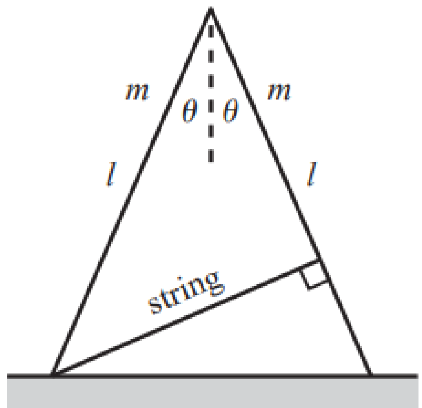
d) $\theta = \arcsin\left(4\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

e) $\theta = \arctan\left(2\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Problema 10. (Morin) Um cilindro uniforme de massa M se encontra em um inclinado com um ângulo θ com a horizontal. Uma corda é amarrada ao ponto mais à direita do cilindro, e uma massa m pende da corda, como mostrado na figura abaixo. Suponha que o coeficiente de atrito entre o cilindro e o plano seja suficientemente grande para evitar escorregões. Qual o valor de m em termos de M e θ se a configuração é estática?



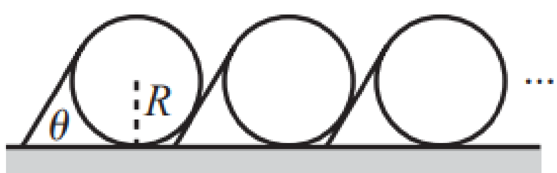
Problema 11. (Morin) Duas varas, cada uma com massa m e comprimento l, são conectadas por uma dobradiça em seus extremidades superiores. Cada uma delas faz um ângulo θ com a vertical. Uma corda sem massa conecta a parte inferior da barra esquerda à barra direita, perpendicularmente como mostrado na figura abaixo. Toda a configuração está em uma mesa sem atrito



a) Qual a tensão na corda?

b) Qual a força que a barra esquerda exerce na barra direita através do ponto de contato entre os dois? (Dica: Não é necessário contas "feias")

Problema 12. (Morin - Desafio) Um grande número de bastões (com densidade de massa por unidade de comprimento ρ) e círculos (com raio R) apoiam-se uns nos outros, como mostrado na Figura. Cada bastão faz um ângulo θ com a horizontal e é tangente ao próximo círculo em sua extremidade superior. As varas são articuladas ao chão, e cada a outra superfície não tem atrito (ao contrário do problema anterior). No limite de um grande número de bastões e círculos, qual é a força normal entre um bastão e o círculo em que ela se apoia, muito à direita? Presumir que o último círculo se apoia contra uma parede, para impedi-lo de se mover.



6. Gabarito

Problema 1. Provou?

Problema 2. 300N

Problema 3. b)

Problema 4. $\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g\tan\alpha$

Problema 5. $\frac{mg}{2}$

Problema 6. $\frac{1}{2}\rho g R\cos\theta$

Problema 7. -

a) $\cos\theta = \frac{r}{R}$

b) $T \leq \frac{\mu M g}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$

Problema 8. $T = \frac{Pl}{d+R}$

Problema 9. e)

Problema 10. $m = \frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}M$

Problema 11. -

a) $T = \frac{mg\sin\theta}{2\cos 2\theta}$

b) $F = T = \frac{mg\sin\theta}{2\cos 2\theta}$

Problema 12. $N = \frac{\rho R g\cos^3(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}$