

Gás ideal e 1ª Lei da Termodinâmica

Luan de Souza Silva - [Projeto Olímpicos](#)

1. Introdução

Agora vamos estudar sobre gases ideais, tópico da física que teve grande importância especialmente durante as duas primeiras Revoluções Industriais. Isso porque com o conhecimento das propriedades dos gases foi possível construir diversas máquinas que facilitaram muito a produção na época. O exemplo mais famoso é a máquina a vapor, aprimorada por James Watt no século 18.

2. O que é um gás ideal? Quando um gás pode ser considerado ideal?

O gás ideal foi o primeiro modelo de gás a ser criado, devido a sua simplicidade e precisão para aplicações do cotidiano.

O modelo de gás ideal faz algumas considerações, que serão listadas a seguir:

- Os átomos/moléculas não possuem volume;
- As interações entre as partículas é puramente mecânica (ou seja, as partículas interagem a partir de colisões perfeitamente elásticas, como bolas de bilhar);

Para um gás poder ser tratado como ideal com grande precisão, é necessário que o mesmo esteja sob certas circunstâncias: baixa pressão, alta temperatura e grande volume.

3. Trabalhando com gases ideais

3.1 A equação de estado do gás ideal

Imagine que exista uma caixa de volume V com N partículas. Considere que uma partícula se move ao longo do eixo x e se choca com uma das paredes da caixa.

Como dissemos anteriormente, os choques de partículas em um gás ideal deve ser totalmente elásticos, então a variação de momento será

$$\Delta p = 2p_0$$

Mas sabemos que a força é dada por

$$F = \frac{dp}{dt}$$



Considere agora o intervalo de tempo que a partícula leva para percorrer uma distância dx , assim

$$dt = \frac{dx}{v}$$

Assim

$$F = \frac{vdp}{dx}$$

Mas a pressão exercida em uma superfície é dada por $P = \frac{dF}{dA}$, assim

$$P\Delta A = \frac{v\Delta p}{\Delta x}$$
$$\Rightarrow P\Delta A\Delta x = 2vp$$

Mas $\Delta V = \Delta A\Delta x$, então

$$P\Delta V = 2pv$$

Mas esta é a relação para uma **única** partícula, se movendo ao longo de apenas um eixo. Se formos considerar movimentos aleatórios, que independem da direção (isotropia), e o volume contido na caixa inteira, chegaremos em

$$PV = \frac{1}{3}Npv$$

Que é a equação de estado geral para um sistema de partículas (isotrópico) com interações puramente mecânicas. Se considerarmos um gás “não quântico” e não relativístico, teremos $p = mv$, ou seja

$$PV = \frac{1}{3}Nmv^2$$

Se considerarmos que $v^2 \propto k\frac{T}{m}$ (imagine por quê), em que k é uma constante qualquer, chegamos em

$$PV = NkT$$

Em que k é a chamada Constante de Boltzmann.

Que é uma das formas da Lei dos Gases Ideais. Mas podemos colocar ela de uma forma diferente:

$$\boxed{PV = nRT}$$

Em que $R = N_{avogadro}k$ é a constante dos gases e n é o número de mols do gás.

Apesar de termos encontrado esta equação de forma totalmente teórica, ela foi desenvolvida de forma totalmente experimental.

3.2 Distribuição de Maxwell-Boltzmann

Apesar de termos considerado anteriormente que $v \propto \sqrt{\frac{T}{m}}$, na realidade estávamos considerando uma velocidade média. Na realidade as velocidades das partículas num gás ideal seguem uma distribuição: a chamada distribuição de Maxwell-Boltzmann.



A primeira pessoa que pensou nas velocidades (na realidade, energias) como uma distribuição foi Boltzmann, que desenvolveu a distribuição de Boltzmann:

$$N(E)dE \approx Ae^{-E/kT}dE$$

Em que A é uma constante qualquer.

A equação acima nos diz que o número de partículas com energia entre E e $E + dE$ decresce exponencialmente com E . Se considerarmos um gás ideal, teremos $E = \frac{mv^2}{2}$, então

$$N(v)dE \approx Ae^{-mv^2/2kT}dE$$

Mas $dE = mv dv$, então

$$N(v)dv = Ae^{-mv^2/2kT}dv$$

Precisamos agora normalizar a distribuição, para isso, devemos ter

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} N(v)dv &= 1 \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-mv^2/2kT}dv &= 1 \end{aligned}$$

Sabendo que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, você pode concluir que $A = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$, assim

$$N(v)dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-mv^2/2kT} dv$$

Considere agora uma distribuição esférica de velocidades. Cada casca esférica terá volume $4\pi v^2 dv$, assim

$$f(v)dv = Bv^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Em que $f(v)$ é a quantidade de partículas com velocidades entre v e $v + dv$. Normalizando, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} Bv^2 e^{-mv^2/2kT} dv = 1$$

Mas nos interessa apenas velocidades positivas, então

$$\int_0^{\infty} Bv^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Pela mesma identidade mostrada anteriormente, chegamos que $B = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}$, e portanto

$$f(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Que é a Distribuição de Maxwell-Boltzmann.



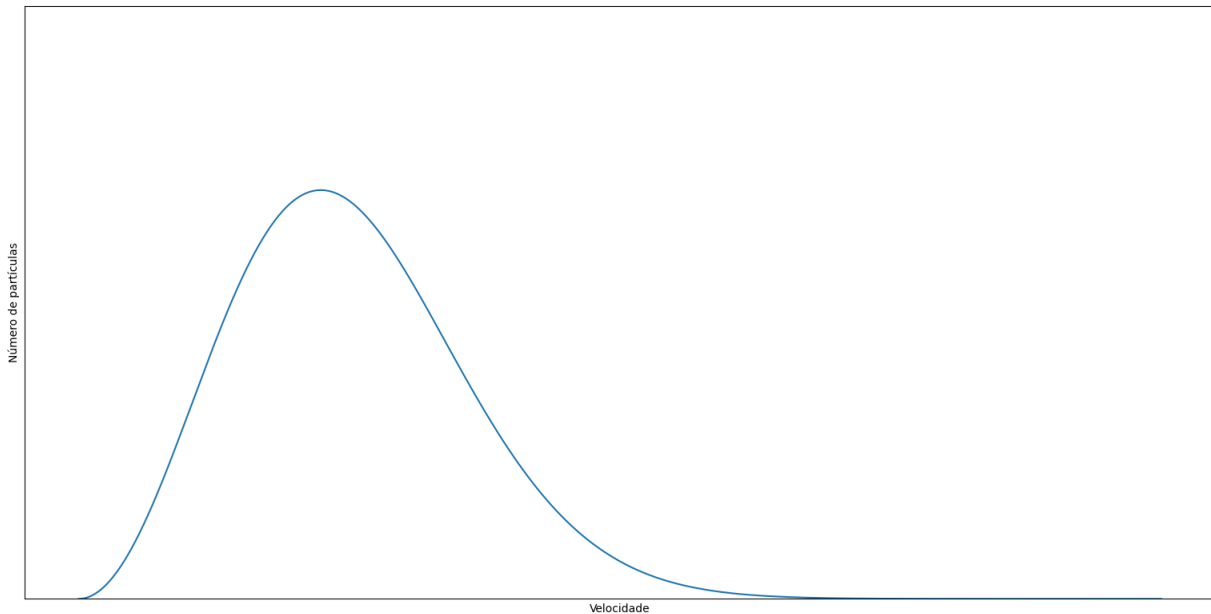


Figure 1: Ilustração da distribuição de Maxwell-Boltzmann.

Em estatística calculamos a média da seguinte forma para distribuições contínuas

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx$$

Em que $P(x)$ é uma função de distribuição de x .

No nosso caso, nos interessa calcular $\langle v \rangle$ e $\langle v^2 \rangle$, assim temos

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8\pi kT}{3}}$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$$

Em geral $\langle v^2 \rangle \neq \langle v \rangle^2$, mas as vezes é comum adotá-los como iguais em **alguns** casos.

Podemos calcular a velocidade mais provável das partículas otimizando a curva, ou seja, tomando

$$\frac{df}{dv} = 0$$

E vamos obter que

$$v_{\text{provável}} = \frac{2kT}{m}$$

Para elucidar a importância do fato de as moléculas seguirem uma distribuição de velocidade, vou citar um exemplo muito comum do dia a dia: a evaporação. Pense, como a água poderia evaporar se a temperatura ambiente não é a mesma que seu ponto de ebulição? A resposta é que como as moléculas seguem uma distribuição de velocidades, algumas moléculas terão energia cinética o suficiente para escaparem do estado líquido.

De fato, é muito mais complexo que isso, na realidade (até porque a distribuição de velocidades num fluido não é necessariamente maxwelliana, e nem sempre é possível considerar o gás como ideal), mas a situação exemplifica bastante este fato.



4. A primeira Lei da termodinâmica

A Primeira Lei da Termodinâmica teve e tem papel fundamental na indústria desde a primeira Revolução Industrial, pois a partir dela e da 2ª Lei da Termodinâmica (que veremos numa futura aula) é possível estudar motores, e assim conseguir a maior eficiência possível.

A Primeira Lei não passa de uma conservação de energia mais geral, e é definida como

$$\boxed{dU = dQ + dW}$$

Em que U é a energia interna do material, dQ é a quantidade de calor fornecida ao material e dW é o trabalho realizado **sobre** o material. Note que dW pode ser escrito como $dW = -pdV$, assim a 1ª Lei fica

$$\boxed{dU = dQ - pdV}$$

Tendo o enunciado da 1ª Lei em mãos, podemos estudar alguns processos mais comuns.

4.1 Processos isocóricos

Processos isocóricos, também chamados de processos isovolumétricos, são, como o nome diz, processos em que o volume do gás permanece constante, ou seja $dV = 0$. Colocando isso na definição da 1ª Lei:

$$\boxed{dU = dQ}$$

Ou seja, não há realização de trabalho.

4.2 Processos isobáricos

Como o nome diz, processos isobáricos são processos em que a pressão é constante. Podemos facilmente calcular o trabalho realizado por um processo isobárico

$$dW = -pdV$$

$$\Rightarrow \Delta W = -p \int_{v_1}^{v_2} V_0 dV$$

$$\boxed{\Delta W = -p\Delta V}$$

4.3 Processos Isotérmicos

Processos isotérmicos são processos em que a temperatura se mantém constante. Para calcular o trabalho realizado por este tipo de processo basta usar a equação de estado dos gases ideais

$$p = \frac{nRT}{V}$$

$$\Rightarrow -pdV = -\frac{nRT}{V}dV$$

$$\Rightarrow \Delta W = -nRT \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{V} dV$$



$$\Rightarrow \Delta W = -nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$\boxed{\Delta W = nRT \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)}$$

4.4 Processos adiabáticos

Processos adiabáticos são processos em que não há troca de calor entre o gás e o meio externo, ou seja, $dQ = 0$, assim

$$\boxed{dU = dW}$$

Se tomarmos a capacidade térmica a volume constante do gás $C_V = n \frac{dU}{dT}$, então

$$\begin{aligned} nC_V dT &= -\frac{nRT}{V} dV \\ \Rightarrow \frac{dT}{T} &= -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) &= -\frac{R}{C_V} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \end{aligned}$$

Sabemos que o índice adiabático de um gás é dado por $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, e que $R = C_p + C_V$, logo

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + \frac{R}{C_V} \\ \Rightarrow \frac{R}{C_V} &= \gamma - 1 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) &= -(\gamma - 1) \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) &= \ln \left(\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} \right) \\ \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} \\ \Rightarrow T_2 V_2^{\gamma-1} &= T_1 V_1^{\gamma-1} \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$TV^{\gamma-1} = cte$$

Mas $T \propto pV$, então

$$\boxed{pV^\gamma = C = cte}$$

Com isso, podemos agora calcular o trabalho realizado por um processo adiabático.

$$-pdV = -CV^{-\gamma} dV$$



$$\Rightarrow dW = -CV^{-\gamma}dV$$

$$\Rightarrow \Delta W = -\frac{C}{1-\gamma}(V^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma})$$

Mas $C = pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$, então

$$\Delta W = \frac{1}{\gamma-1}(pV - p_0V_0)$$

4.5 Processos politrópicos

Processos politrópicos são processos em que há troca de calor, e podem ser descritos com

$$pV^n = cte$$

Em que n é o índice politrópico do processo.

Note que se $n = \gamma$, não há trocas de calor. Na aula de calorimetria, veremos que nesse caso não há troca de calor, e portanto a capacidade térmica do gás nesse processo é 0.

5. O diagrama PV

Agora vamos falar de uma ferramenta muito útil para visualizar estes processos mencionados. Não só isso, mas também terá ainda mais utilidade quando tratarmos da 2ª Lei da Termodinâmica e de ciclos, como Ciclo de Carnot e Ciclo de Otto. Esta ferramenta é o diagrama PV , que é basicamente um gráfico cujo eixo horizontal representa o volume da substância, e o eixo vertical representa a pressão.

No diagrama PV os processos isocóricos tem a seguinte forma

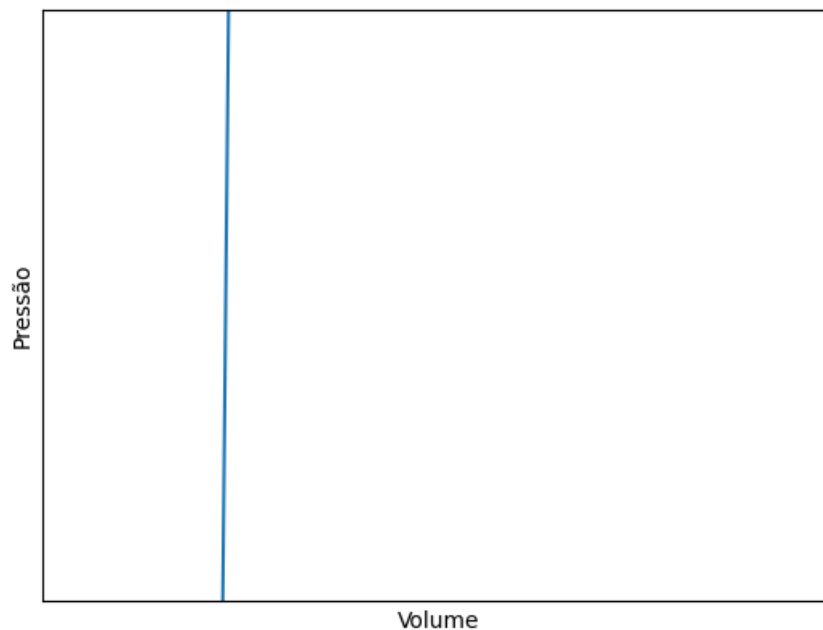


Figure 2: Ilustração gráfica no diagrama PV de um processo isocórico.



Já os processos isobáricos são representados da forma abaixo

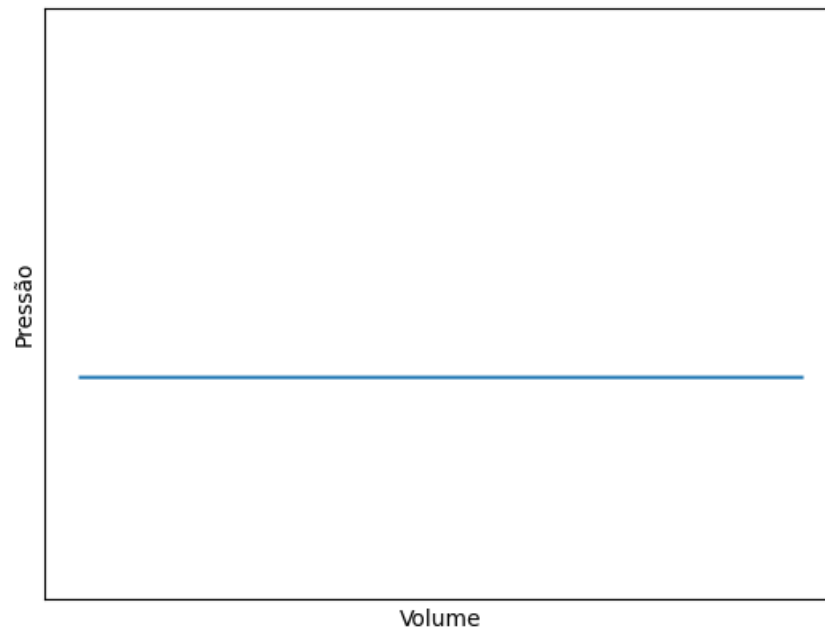


Figure 3: Ilustração gráfica no diagrama PV de um processo isobárico.

E os isotérmicos:

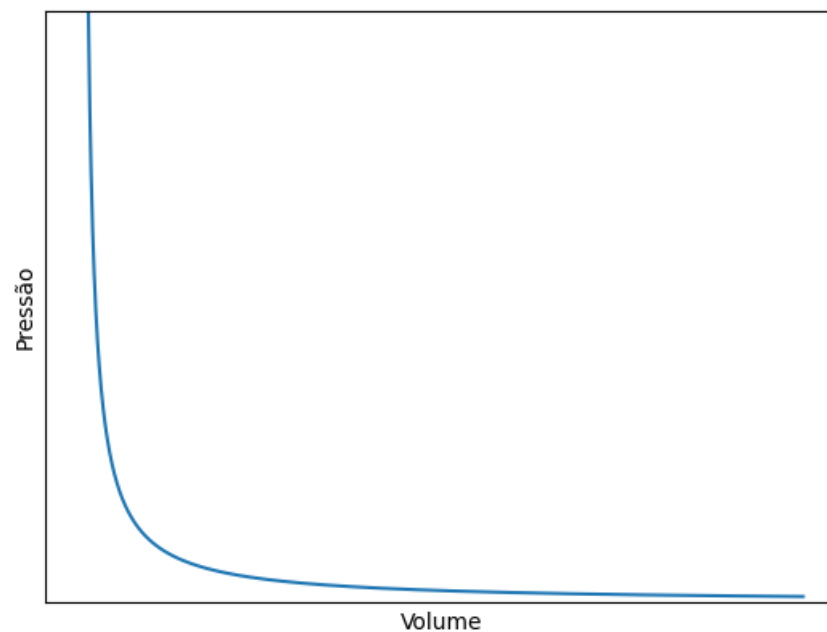


Figure 4: Ilustração gráfica no diagrama PV de um processo isotérmico.

E por fim os adiabáticos



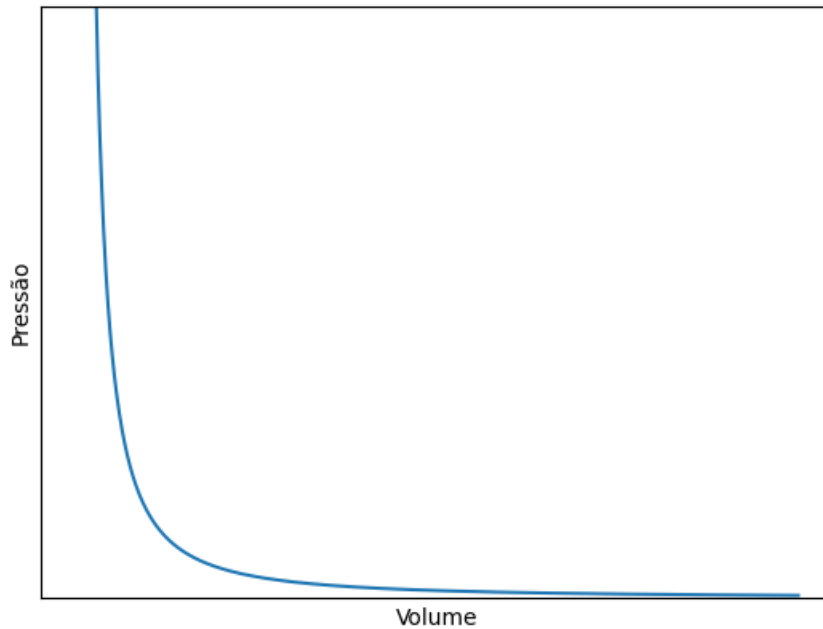


Figure 5: Ilustração gráfica no diagrama PV de um processo adiabático.

Note que os processos adiabáticos tem uma forma muito parecida com os isotérmicos, com a diferença de que eles são mais “abruptos”. Se você observar com atenção, verá que os processos adiabáticos decrescem mais rápido que os isotérmicos. Isso está diretamente relacionado ao fato de que no processo adiabático $p \propto V^{-\gamma}$, em que $\gamma > 1$, enquanto que num processo isotérmico temos $p \propto V^{-1}$.

Observe também que o trabalho realizado por um processo é a área abaixo do gráfico.

6. Uma primeira aproximação acerca da física atmosférica

6.1 Atmosfera isotérmica

Vamos agora considerar um modelo de atmosfera isotérmica, que claramente é uma aproximação muito irreal, mas para certas regiões de nossa atmosfera, é uma aproximação muito boa. Para isso, vamos usar duas equações: a equação de estado do gás ideal e a equação de equilíbrio hidrostático.

Pela equação de estado do gás ideal

$$pV = nRT$$

Mas $n = \frac{m}{M}$, em que M é a massa molar do material do gás. Assim

$$p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M}$$

$$\Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$



Pela equação de equilíbrio

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dh} &= \rho g \\ \Rightarrow \frac{dp}{dh} &= \frac{pM}{RT}g \\ \Rightarrow \frac{dp}{p} &= \frac{Mg}{RT}dh \\ \Rightarrow \int_p^{p_0} &= \int_0^h \frac{Mg}{RT}dh\end{aligned}$$

Considerando M e g constantes, e como o modelo é isotérmico, T também é constante, ficamos com

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mgh}{RT}$$

$$\boxed{p = p_0 e^{-Mgh/RT}}$$

Podemos calcular a densidade atmosférica utilizando $\rho = \frac{pM}{RT}$:

$$\rho = \frac{p_0 M}{RT} e^{-Mgh/RT}$$

Mas $\frac{p_0 M}{RT} = \rho_0$, então

$$\boxed{\rho = \rho_0 e^{-Mgh/RT}}$$

6.2 Atmosfera adiabática

Para modelar uma atmosfera adiabática usaremos basicamente as mesmas ferramentas usadas para a atmosfera isotérmica, com a adição de mais uma: $pV^\gamma = cte$.

Pela expressão mostrada e pela equação de estado dos gases ideais

$$\begin{aligned}p\left(\frac{T}{p}\right)^\gamma &= cte \\ \Rightarrow p^{1-\gamma}T^\gamma &= cte\end{aligned}$$

Diferenciando, temos

$$\begin{aligned}(1-\gamma)p^{-\gamma}T^\gamma dp + \gamma p^{1-\gamma}T^{\gamma-1}dT &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{T}{p}\right)^\gamma dp &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{T}{p}\right)^{\gamma-1} dT \\ \Rightarrow \frac{1}{p} dp &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{T} dT\end{aligned}$$

Pela equação de equilíbrio, temos

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dh} &= -\rho g \\ \frac{dp}{dh} &= -\frac{pM}{RT}g\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{T}{p} dp &= -\frac{Mg}{R} dh \\ \Rightarrow T \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{T} dT &= -\frac{Mg}{R} dh \\ \Rightarrow \int_T^{T_0} dT &= -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{Mg}{R} \int_0^h \\ \boxed{T = T_0 - \frac{C_p Mg}{R} h} \end{aligned}$$

Em que C_p é a capacidade térmica a pressão constante do gás.

Com a temperatura podemos calcular a pressão pela altura usando $p^{1-\gamma} T^\gamma = cte$:

$$\begin{aligned} p^{1-\gamma} T^\gamma &= p_0^{1-\gamma} T_0^\gamma \\ \Rightarrow p &= p_0 \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\gamma/(1-\gamma)} \\ \boxed{p = p_0 \left(1 - \frac{C_p Mg}{RT_0} h \right)^{C_p}} \end{aligned}$$

7. Noções sobre gases reais

Tratamos de gases ideais na maioria dos problemas usuais de ensino médio, mas fica a dúvida: como tratar de gases não ideais. A resposta é que existem muitas formas, pois há vários modelos de gases reais.

O primeiro destes modelos, e possivelmente o mais popular, que é o que trataremos aqui, é o Modelo de Van der Waals. As grandes diferenças entre os modelos de Van der Waals e dos gases ideais são: o modelo de Van der Waals considera o volume ocupado pelas partículas, o que faz muita diferença para um gás em alta pressão, e considera também as interações eletromagnéticas entre as partículas.

A equação de estado do gás de Van der Waals é a seguinte:

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

Sendo a e b duas constantes, que dependem de material para material. Como pode-se inferir pela equação, b corresponde ao fator volume das partículas, enquanto a corresponde às interações.

Para estudar o comportamento do gás de Van der Waals podemos desenhar um diagrama PV , traçando isotermas. Para isto, devemos primeiro achar a relação entre P e V . Para isto, basta expandir a equação de estado, e chegar em:

$$\begin{aligned} PV - Pnb + \frac{an^2}{V} - \frac{abn^3}{V^2} &= nRT \\ \Rightarrow PV^3 - PnbV^2 + aVn^2 - abn^3 &= nV^2 RT \\ \Rightarrow P(V^3 - nbV^2) &= nV^2 RT - aVn^2 + abn^3 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow P = \frac{nV^2RT - an^2V + n^3ab}{V^2(V - nb)}$$

Plotando no diagrama PV , temos

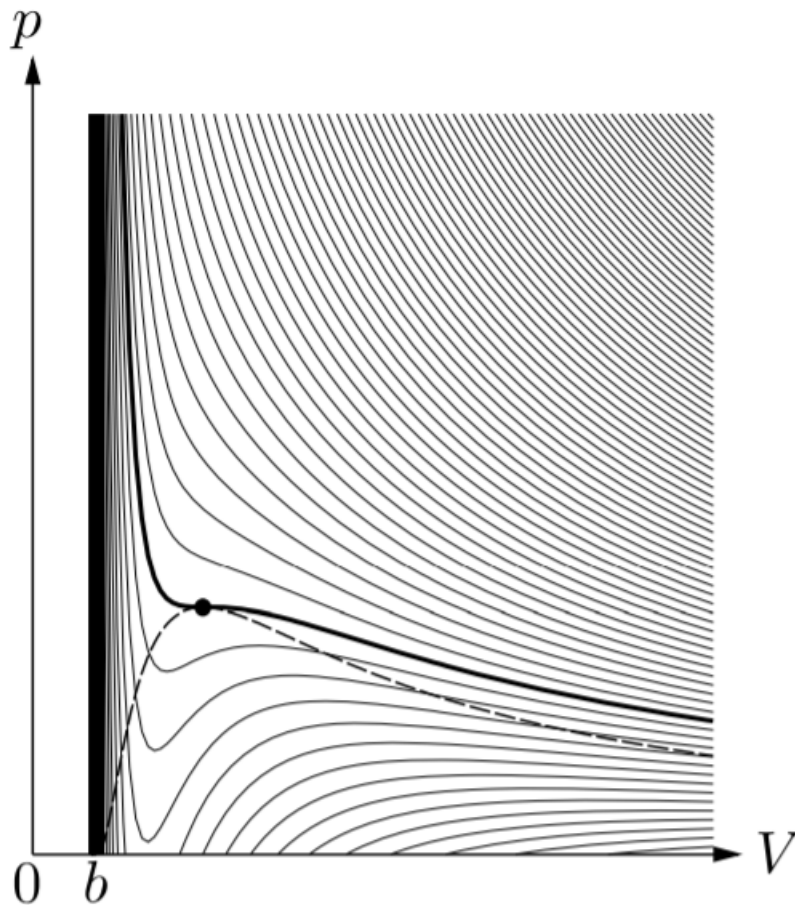


Figure 6: Isothermas num gás de Van der Waals. Fonte: Concepts in thermal physics, Blundell

Primeiramente, note que para altas temperaturas, as isothermas se assemelham às isothermas de gases ideais.

Em segundo plano, perceba que para baixas temperaturas há a formação de um ponto de inflexão horizontal. Próximo dessa região há coexistência de gás e líquido.

8. Problemas

Problema 1. (Irodov) Um recipiente de volume $V = 30l$ contém gás ideal numa temperatura de $0^\circ C$. Após uma porção do gás ser liberada, a pressão no recipiente diminuiu em $\Delta p = 0,78atm$ (com a temperatura se mantendo constante). Encontre a massa do gás liberado. A densidade do gás em condições normais é de $\rho = 1,3g/l$.

Problema 2. (Irodov) Um recipiente de volume $V = 20l$ contém uma mistura de hidrogênio e hélio a uma temperatura $T = 20^\circ C$ e pressão $p = 2,0atm$. A massa da mistura é igual a $m = 5,0g$. Encontre a razão entre as massas de hidrogênio e hélio na mistura dada.



Problema 3. (Irodov) Um recipiente contém uma mistura de nitrogênio ($m_1 = 7,0g$) e dióxido de carbono ($m_2 = 11g$) na temperatura $T = 290K$ e pressão $p_0 = 1,0atm$. Encontre a densidade dessa mistura, assumindo que os gases são ideais.

Problema 4. (Irodov) Um recipiente de volume V é evacuado por uma bomba de pistão. Cada ciclo do pistão captura um volume ΔV . Quantos ciclos são necessários para reduzir a pressão do recipiente η vezes? Assuma que o processo é isotérmico e que o gás é ideal.

Problema 5. (Irodov) Encontre a máxima temperatura “atingível” de um gás ideal em cada processo a seguir:

a) $p = p_0 - \alpha V^2$

b) $p = p_0 e^{-\beta V}$

Problema 6. (Irodov) Um recipiente cilíndrico alto com nitrogênio gasoso está num campo gravitacional uniforme no qual a aceleração de queda livre é g . A temperatura no recipiente varia com a altura de tal forma que sua densidade é constante. Encontre o gradiente de temperatura $\frac{dT}{dh}$

Problema 7. (Irodov) Um gás ideal de massa molar M está num campo gravitacional uniforme cuja aceleração de queda livre é g . Encontre a pressão do gás como função da altura h , se $p = p_0$ em $h = 0$, e a temperatura varia com a altura da seguinte forma

a) $T = T_0(1 - ah)$

b) $T = T_0(1 + ah)$

Problema 8. (Irodov) Um cilindro horizontal fechado em uma das bases gira com velocidade angular constante ω sobre um eixo vertical que passa pela entrada aberta do cilindro. A pressão externa é igual a p_0 , a temperatura é T e a massa molar do ar é M . Encontre a pressão do ar como função da distância r ao eixo de rotação. A massa molar não depende de r .

Problema 9. (Irodov) Um recipiente termicamente isolado contendo gás ideal cuja massa molar é M e índice adiabático γ se move com velocidade v . Encontre o incremento na temperatura do gás se o recipiente parar subitamente.

Problema 10. (Ivan Guilhon) Um mol de hélio segue o ciclo 1-2-3-1, mostrado no diagrama. Durante o processo 1-2 a temperatura do gás depende do volume segundo a equação $T = bV^2$ onde b é uma constante física de dimensões apropriadas. Durante o ciclo, a temperatura máxima atingida pelo gás é quatro vezes maior que a menor temperatura atingida.



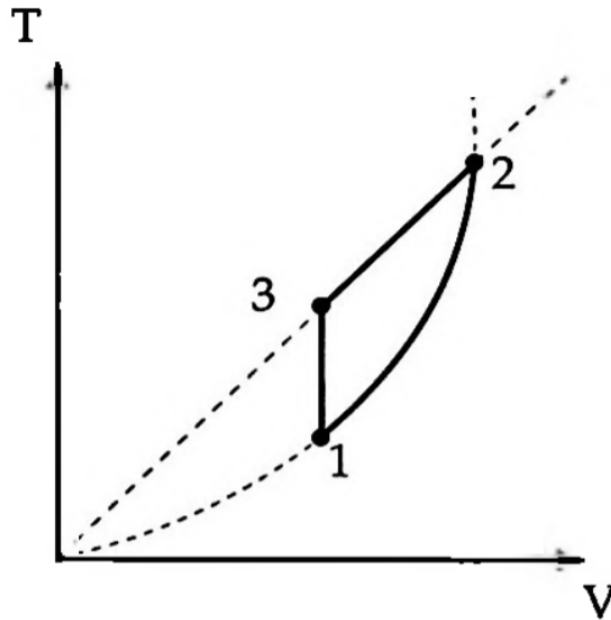


Figure 7

Esse ciclo Sabendo que na fase 1-2 do ciclo o gás absorve uma quantidade Q de calor, quanto calor Q' é liberado pelo gás no caminho 2-3-1?

Problema 11. (Ivan Guilhon) Sejam A e B dois cilindros de volume igual a V , contendo o mesmo gás ideal à temperatura T e em pressões $2P$ e P , respectivamente. A válvula que conecta os dois cilindros é ligeiramente aberta e, havendo vazamento de gás de A para B, a pressão em A é mantida em $2P$, fazendo uso de um pistão móvel. O processo continua até que o gás no cilindro B também está em $2P$. Considere que há um bom contato térmico entre os cilindros e um isolamento térmico da vizinhança. A capacidade calorífica molar do gás a volume constante é $c_{v,m} = \frac{3}{2}R$ onde R é constante universal dos gases. Determine:

- O volume final de gás no cilindro A, em termos de V .
- A temperatura final em termos de T .

9. Gabarito

Problema 1. $m = \frac{\rho V \Delta p}{p_0} = 30g$

Problema 2. $\frac{m_H}{m_{He}} = 0,50$

Problema 3. $\rho = 1,5g/L$

Problema 4. $n = \frac{\ln(\eta)}{\ln(1 + \Delta V/V)}$



Problema 5. a) $T_m = \frac{2p_0}{3R} \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}$ b) $T_m = \frac{p_0}{e\beta R}$

Problema 6. $\frac{dT}{dh} = -\frac{Mg}{R}$

Problema 7. a) $p = p_0(1 - ah)^{Mg/aRT_0}$ b) $p = \frac{p_0}{(1 + ah)^{Mg/aRT_0}}$

Problema 8. $p = p_0 e^{M\omega^2 r^2 / 2RT}$

Problema 9. $\Delta T = \frac{1}{2} M v^2 \frac{\gamma - 1}{R}$

Problema 10. $Q' = -\frac{13}{12} Q$

Problema 11. a) $V' = \frac{7}{10} V$ b) $T' = \frac{17}{15} T$

