Lei da Gravitação Universal

Breno de Carvalho - Projeto Olímpicos

Esse material é um dos três sobre gravitação, logo é importante que não os consuma de forma separada. Às vezes algum conceito pode estar mais bem aprofundado em outro do que aqui, por exemplo. Desfrute!

1. Introdução

O conceito de gravidade foi muito debatido na história e sofreu diversas alterações ao longo dela. Ao olhar para o céu, a filósofa Hipátia questionou-se sobre o porquê das estrelas não caírem dos céus assim como as frutas caem das árvores. Galileu mostrou que corpos em queda livre caem com uma aceleração constante (não é exatamente constante, mas isso é assunto para um outro momento). Por outro lado, Kepler acreditava na existência de alguma propriedade magnética que faria os corpos permanecerem em órbitas.

Newton, com seus estudos direcionados à Dinâmica, descreveu a existência de uma força gravitacional e a denotou matematicamente, conseguindo explicar os efeitos da gravidade. Mas você percebe que ainda falta alguma coisa? Essa tal coisa foi respondida por Einstein, que explica de fato o que é a gravidade e como ela se origina; complementando os estudos do cientista inglês. Todavia, foquemos na Lei da Gravitação Universal de Newton.

2. A 4ª Lei de Newton

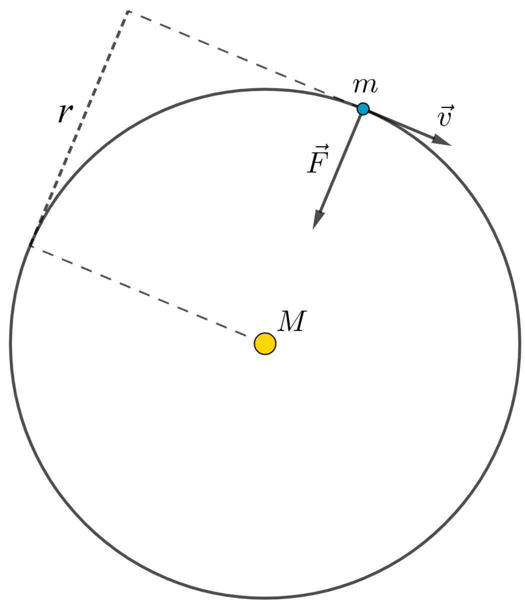
2.1 *Contextualizando...*

Na epidemia da Grande Peste em Londres, que ocorreu entre 1665 e 1666, um menino de 23 anos, quarentenado e curioso sobre o porquê das coisas caírem, formulou uma teoria universal que mudou o mundo desde então. Isaac Newton era seu nome. E além de fazer isso, comprovou matematicamente o que Kepler fez empiricamente, mas isso é conteúdo para **esse** material. O cara era foda, você verá! Agora, acompanharemos um raciocínio próximo do que o físico inglês teve.

2.2 *Dedução*

Partindo para o conteúdo, você viu nesse material que Newton introduziu o conceito de forças no campo científico, mas de uma maneira predominante generalizada. Aqui veremos essa aplicação, resumidamente falando, para a gravidade (por isso, chamei-a de 4ª Lei). Mas o que é gravidade? Newton não definiu ao certo o que é, mas estudou alguns de seus efeitos e conseguiu denotar uma lei que é regida por ela.

Em primeiro momento, consideremos uma órbita circular. Essa, tem características de um movimento circular (é mesmo, é?). Foi também visto no material de Movimento Circular que a resultante centrípeta é dada por $F_c = \dfrac{mv^2}{r}$. Observe a figura abaixo, nela há um esquema da órbita circular da Terra ao redor do Sol.



Sabendo que $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ e pela lei harmônica, $T^2 = kr^3$:

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2}{kr} \; ; \; F = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}$$

Assim, $F \propto \dfrac{m}{r^2}$. Além disso, sabemos pela terceira lei de Newton que o planeta exerce uma força igual e contrária sobre o Sol, logo, essa força centrípeta F é tal que, $F \propto \dfrac{M}{r^2}$.

Essa força depende de m, M e r^2. Podemos expressar isso dessa forma: $F \propto \dfrac{Mm}{r^2}$. E essa constante de proporcionalidade é o que chamamos de G, ficando assim então:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

3. Órbitas

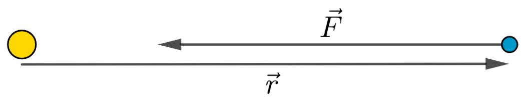
Podemos definir órbita como sendo o movimento que um astro faz ao redor de outro (de forma geral). E dependendo da velocidade em que esse corpo orbita, ele pode assumir diferentes tipos de órbitas! Sim! Entretanto, antes disso tudo, vejamos algumas propriedades fundamentais delas.

3.1 Conservação do momento angular e da energia total

O momento angular $\vec{L}$ é definido pelo produto vetorial entre o vetor momento linear e o vetor raio: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, com módulo $L = mrv \cdot \operatorname{sen}\theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{p}$. Além disso, o torque $\vec{\tau}$ é a taxa de variação temporal do momento angular, quase como um análogo rotacional da força (que é a variação temporal do momento linear), logo,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = F \cdot r \cdot sen\theta$$

A figura abaixo representa vetorialmente essa situação em uma órbita.



Como $\theta = 180°$, temos:

$$\tau = F \cdot r \cdot sen180° \Rightarrow \tau = 0$$

Assim, vemos que não há torque. Mas o que é torque mesmo? É a variação temporal do momento angular. Percebe? Se não há torque, não há variação do momento angular! Concluindo, ele se conserva.

E como a energia se comporta? Idealmente, sabemos que o sistema formado pelos astros de interesse (no caso acima, um planeta e o Sol) é isolado, ou seja, sua energia se conserva. Agora, se um asteroide viesse na direção do nosso sistema e colidisse com um dos astros, é evidente que esse asteroide atua como uma força externa, mudando portanto a energia do sistema original (parte da energia seria convertida em calor, que faz parte do nosso sistema). Note também que, caso o nosso sistema incluísse o asteroide, sua energia se conservaria, uma vez que interações entre o asteroide e os outros astros seriam internas.

3.2 Órbitas circulares

Esse é o tipo de órbita que se acreditou ser universal por muito tempo em nossa história. Muitos foram presos, escravizados, torturados e até mortos por questionarem tal tipo, que leva em conta a "perfeição" do criador, que é o círculo. A circunferência é de fato uma figura interessante, é dela que surge uma das constantes mais importantes da história, o π. Todavia, atualmente sabemos que grande parte das órbitas são elípticas, parabólicas ou hiperbólicas; é impossível encontrar uma órbita perfeitamente circular, mas a utilizamos para fazer aproximações. Isso demorou bastante para ser concretizado e aceito na sociedade; na verdade até hoje a ciência é bastante banalizada (um salve pros terraplanistas!). Prosseguindo, todas as referências que farei nesse subtópico será em relação à figura abaixo.

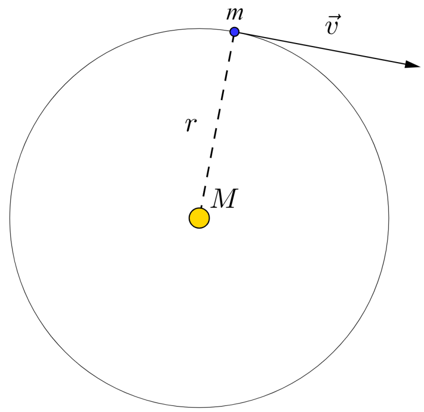


Figura 1: Órbita Circular

Foi visto acima que a força de atração gravitacional é denotada por $F = \dfrac{GMm}{r^2}$. Também foi visto que a resultante centrípeta é dada por $F_c = \dfrac{mv^2}{r}$.

Assim:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Essa é a velocidade orbital de um corpo numa órbita circular. Ademais, sabe-se que a energia total de um sistema (energia mecânica) é dada por $E = K + U$, sendo K a energia cinética e U a potencial. Nesse caso, a potencial é a gravitacional, dada por $-\dfrac{GMm}{r}$ (isso vem da lei da gravitação universal e da definição da energia potencial associada à uma força).

Sabendo dessa definição,

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

Sendo v a velocidade orbital em uma órbita circular,

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{2GMm}{2r}$$

Dessa forma,

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

Há uma relação entre K e U, que na órbita circular é mais trivial de deduzir:

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{mv^2}{2}}{-\frac{GMm}{r}} = -\frac{v^2 r}{2GM} = -\frac{GMr}{2GMr} = -\frac{1}{2}$$

Portanto,

$$U = -2K$$

3.3 Órbitas elípticas

Caso Hipátia de Alexandria, no século V, não tivesse sido morta, esquartejada e queimada, provavelmente seria ela que apresentaria pela primeira vez na história um modelo de órbitas elípticas; já que ela contribuiu muito no estudo de cônicas. Mas como isso não aconteceu, só no século XVII, Johannes Kepler, empiricamente, chegou a essa conclusão através de sua parceria com Tycho Brahe, o astrônomo dinamarquês. Uma órbita elíptica tem como base uma elipse (nem sabia!), e ela apresenta algumas propriedades interessantes que serão aprofundadas no apêndice. Por ora, analise a imagem abaixo.

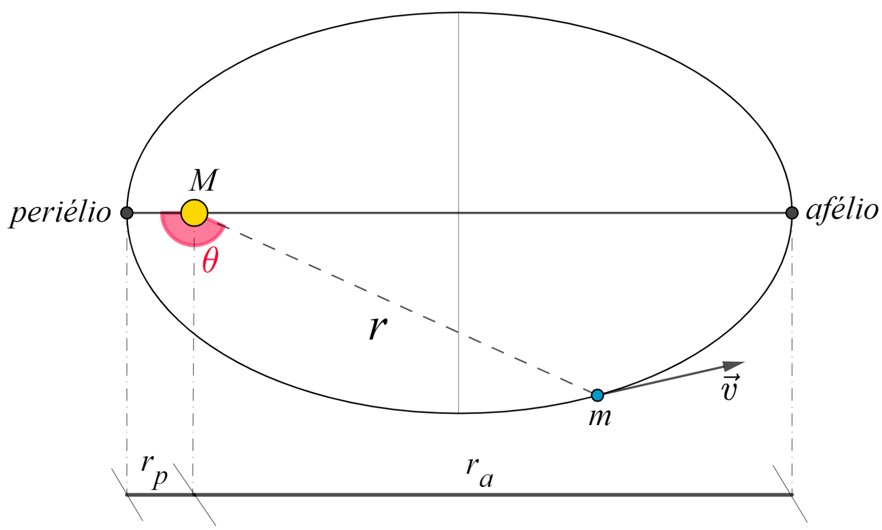


Figura 2: Órbita Elíptica

Não se assuste com o θ! Nós o chamamos de **anomalia verdadeira**, mas não se preocupe com ele agora.

Uma forma de calcular a energia orbital desse tipo de órbita, é comparar as energias em diferentes momentos. Como assim? Sabe-se que a energia mecânica conservada nas órbitas. Então se pegarmos a energia mecânica em um determinado ponto, pegarmos a energia mecânica em outro ponto e depois as comparar, serão iguais. Mas... que pontos podem ser esses? Qualquer um? Bom, não é recomendável você escolher qualquer um, já que você não tem informações de forma generalizada para qualquer ponto (pelo menos até esse momento). Então, vamos prosseguir.

Como você verá, para a Terra (nossa cobaia) a distância ao afélio e ao periélio são dedutíveis trivialmente. Então usaremos essas posições como referência. Se liga na malandragem!

A energia total é descrita por:

$$E = K + U$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

Para o periélio:

$$E_p = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{r_p}$$

Do momento angular, temos que $L = mrv \cdot sen\theta$. Como está no periastro, note que $\theta = 90°$. Logo, $sen\theta = 1$ (o mesmo vale para o afélio). Continuando, se elevarmos ao quadrado: $L^2 = m^2r^2v^2$. Reorganizando, $v^2 = \dfrac{L^2}{m^2v^2}$.

$$E_p = \frac{m}{2} \cdot \frac{L_p^2}{m^2r_p^2} - \frac{GMm}{r_p}$$

$$E_p + \frac{GMm}{r_p} = \frac{m}{2} \cdot \frac{L_p^2}{m^2r_p^2}$$

$$2mr_p^2E_p + 2GMm^2r_p = L_p^2$$

Fazendo isso para o afélio: $2mr_a^2E_a + 2GMm^2r_a = L_a^2$

Como o momento angular também se conserva, podemos igualar as duas equações:

$$2mr_p^2E_p + 2GMmr_p = 2mr_a^2E_a + 2GMm^2r_a$$

$$r_p^2E_p + GMmr_p = r_a^2E_a + GMmr_a$$

$$r_p^2E_p - r_a^2E_a = GMmr_a - GMmr_p$$

Como as energias se conservam, são iguais:

$$r_p^2E - r_a^2E = GMmr_a - GMmr_p$$

$$E(r_p^2 - r_a^2) = GMm(r_a - r_p)$$

$$E(r_p - r_a)(r_p + r_a) = -GMm(r_p - r_a)$$

$$E(r_p + r_a) = -GMm$$

$$E \cdot 2a = -GMm$$

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

No material referente às Leis de Kepler, você verá que numa órbita elíptica as velocidades orbitais variam. Mas, por quê? Isso acontece porque ora o corpo orbitante se afasta da massa central, ora se aproxima. Agora que sabemos a energia total, pode-se calcular a velocidade orbital em um ponto qualquer.

$$E = K + U \Rightarrow K = E - U \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = -\frac{GMm}{2a} + \frac{GMm}{r} \Rightarrow v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Essa é a equação Vis Visa. Perceba a dependência ao r, que é a distância do corpo que orbita à massa central. Isso concretiza o que foi dito no parágrafo anterior.

3.4 *Velocidade de escape*

Ok, já vimos sobre as velocidades que se resultam através da força gravitacional. Mas e se quisermos, literalmente, tirar um corpo da atração gerada pela massa central? Ou melhor, que velocidade deve ser alcançada para que isso aconteça?

Imediatamente antes do corpo escapar de fato, ele tem uma velocidade inicial (que é a própria velocidade de escape). Qual seria sua velocidade final, bem lá no infinito? Isso mesmo! Um zero bem redondo, ou bem elíptico (ba dum tss). Ou seja, o corpo chegará em uma distância arbitrariamente grande com uma velocidade não negativa, satisfazendo a nossa condição de escape! Ele não sofrerá mais quaisquer interferências da massa que estava o prendendo. Na energia total, temos o quê? A soma da energia cinética e da potencial. Como a velocidade final é 0, $K = 0$. Como ele está muito longe da massa M e a energia potencial cai com a distância, temos que $U = 0$. Nesse instante, o corpo, mais uma vez dizendo, já não sofre mais quaisquer interferências da massa que estava o prendendo! Portanto:

$$E = K + U \Rightarrow E = 0$$

Como as energias totais se conservam, a energia total inicial (composta pela energia cinética inicial e a energia potencial gravitacional inicial) deve ser igual à energia total final.

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

3.5 *Órbitas parabólicas*

Órbitas parabólicas são a "transição" entre as órbitas elípticas, que possuem energia total negativa, e as hiperbólicas, que possuem energia total positiva. Assim, vemos que a energia total da órbita parabólica é nula... isso provavelmente te lembra algo - é a mesma energia da órbita de escape! Perceba a sutil transição, o corpo estava em uma órbita elíptica, com energia total negativa. Conforme sua energia total for aumentando, a elipse ficará cada vez mais "aberta" (ou seja, com um grande semieixo maior), eventualmente ficando nula, que é a situação de escape E a configuração de uma órbita parabólica. Vale ressaltar que foi Newton que a demonstrou ser possível. Atente-se ao esquema abaixo:

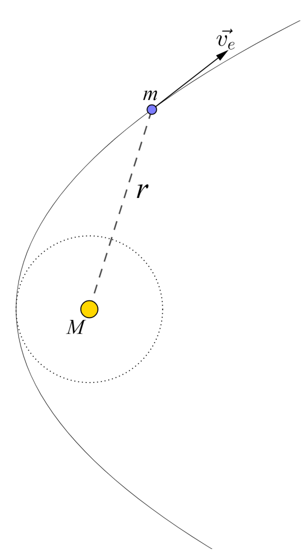


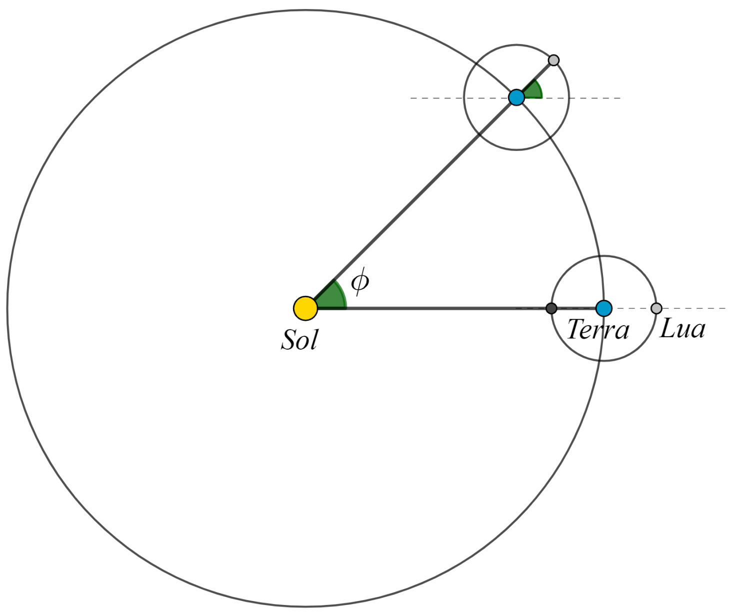
Figura 3: Órbita Parabólica

Como demonstrado acima, a velocidade orbital em uma órbita parabólica será a velocidade de escape a uma determinada distância da massa central!

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

4. Bônus: Período Sinódico

O período sinódico está relacionado a configurações, isto é, posições específicas. Por exemplo, vamos calcular quanto tempo leva para uma Lua Cheia ir a outra Lua Cheia, em sequência. O esquema abaixo representa essa situação, com a Terra e a Lua girando no sentido anti-horário.



A velocidade angular que a Lua orbita a Terra é $\omega_L = \frac{2\pi}{T_L}$, já a velocidade angular que a Terra orbita o Sol é $\omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$, sendo T_L e T_T, os períodos orbitais da Lua e Terra, respectivamente. Perceba que a Lua variou $2\pi + \phi$ em um determinado tempo. Esse, chamaremos de **período sinódico**, S. Perceba também que a Terra variou ϕ nesse mesmo tempo S. Portanto,

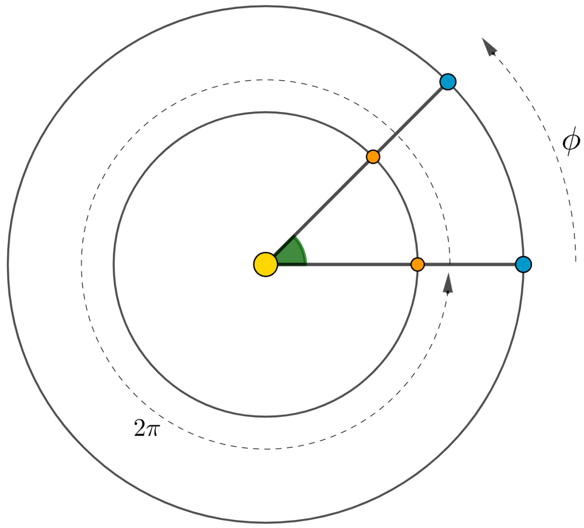
$$\omega_L = \frac{2\pi}{T_L} = \frac{2\pi + \phi}{S} \ ; \omega_T = \frac{2\pi}{T_T} = \frac{\phi}{S}$$

$$\omega_L = \frac{2\pi + \phi}{S} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_B} = \frac{2\pi}{S} + \frac{2\pi}{T_T} \Rightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_T}$$

Sabendo que o período orbital da Terra é de aproximadamente 365 dias, e que o período orbital da Lua é de aproximadamente 27 dias:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{27} - \frac{1}{365} \Rightarrow S \approx 29 \text{ dias}$$

Mas esse foi um caso específico para a Lua. E se quisermos calcular o período sinódico entre configurações planetárias? Analise a imagem a seguir e deduza:



Hmmm, e se a translação for retrógrada? Ou seja, e se os planetas translacionarem em direções opostas? Como ficaria o período sinódico? Deduz aí que eu tô com preguiça!

Esse é um bizu bastante cobrado em olimpíadas de astronomia, principalmente nas seletivas. Nesse sentido, é bom você o dominar! :)

5. Problemas

Problema 1. (IOAA 2012) Calcule a razão entre a densidade média da Terra e do Sol, usando apenas os dados abaixo:

- O diâmetro angular do Sol, visto da Terra, como 30'
- aceleração gravitacional na superfície da Terra sendo 9,81 m/s^2
- a duração do ano
- um grau na latitude da superfície da Terra corresponde a 111 km.

Problema 2. Vreno leu em seu livro o seguinte parágrafo: "O período sideral é definido como o tempo que um astro demora para voltar a mesma configuração com respeito às estrelas distantes. Por outro lado, o período sinódico é o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas de um astro na mesma posição com relação a um ponto de observação, que não precisa estar parado." Com a curiosidade de uma criança, Vreno foi calcular o valor do período sinódico de Ganimedes com relação a Júpiter. Sabendo que o período sideral de Ganimedes é 7,1546 dias, que Júpiter completa uma volta ao redor do Sol a cada 12 anos e que ambas as órbitas são percorridas no mesmo sentido, qual foi o resultado encontrado por Vreno? (Note: 1 ano = 365,25 dias)

a) 7,1663 dias

b) 7,1739 dias

c) 7,1429 dias

d) 7,2025 dias

Problema 3. (Seletiva de Astronomia) Considere dois astros A e B de massas m_A e m_B, onde $m_A = 2m_B$, em órbitas circulares em torno de uma estrela E. Sabe-se que, em relação à estrela E, o período orbital de A é duas vezes menor que de B. Assinale a alternativa que mostra o valor da razão entre a força gravitacional entre a estrela E e o astro A, F_A, e a força gravitacional entre a estrela E e o astro B, F_B.

a) $4\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{2}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\dfrac{1}{4\sqrt[3]{2}}$

Problema 4. (Seletiva de Astronomia) Em sua máxima aproximação ao Sol, o módulo da energia potencial gravitacional de um cometa é menor que o módulo da sua energia cinética. Podemos afirmar que a órbita deste cometa em torno do Sol é:

a) Elíptica, pois a energia mecânica é maior que zero.

b) Elíptica, pois a energia mecânica é menor que zero.

c) Parabólica, pois a energia mecânica é sempre igual a zero.

d) Hiperbólica, pois a energia mecânica é maior que zero.

Problema 5. (Seletiva de Astronomia) Do mesmo jeito que a Terra possui um satélite natural (a Lua) e Júpiter possui mais de 60, os asteroides também podem ter satélites naturais. Em 1993 foi descoberto o primeiro asteroide que possui sua própria lua. Esta lua, de pouco mais de 1 quilômetro de diâmetro, ganhou o nome de Dactyl, e ela é o satélite natural do asteroide 243 Ida, que habita o Cinturão de Asteroides, entre as órbitas de Marte e Júpiter. Considere um asteroide, de massa $M = 8{,}40 \cdot 10^{16}$ kg que possui um satélite natural, de massa $m = 3{,}90 \cdot 10^{12}$ kg, que orbita este asteroide a uma distância média de 200 km. Qual será, aproximadamente, o período orbital P de rotação do satélite em torno do asteroide?

Problema 6. (IOAA 2009) Estime o raio de um planeta no qual uma pessoa pode escapar de sua gravidade pulando verticalmente. Assuma que a densidade do planeta e da Terra são iguais. Dado: $\rho_T = 5515\ kg/m^3$.

Problema 7. (IOAA 2011) Estime a quantidade de estrelas em um aglomerado globular de um diâmetro de 40 parsecs, sabendo que velocidade de escape na periferia do aglomerado é 6 km/s e que todas as estrelas são similares ao Sol. Dado: 1 $parsec = 3{,}0856 \cdot 10^{16}\ m$ e $M_{Sol} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

6. Gabarito

De preferência, não olhe aqui até tentar bastante resolver os problemas propostos acima! Tô de olho, hein!

Problema 1. $\frac{\rho_T}{\rho_S} = 3{,}23$

Problema 2. a) 7,1663 dias

Problema 3. a) $4\sqrt[3]{2}$

Problema 4. d) Hiperbólica, pois a energia mecânica é maior que zero

Problema 5. 2,75 dias

Problema 6. $R \approx 2\ km$

Problema 7. Aproximadamente 80000 estrelas