Hidrodinâmica

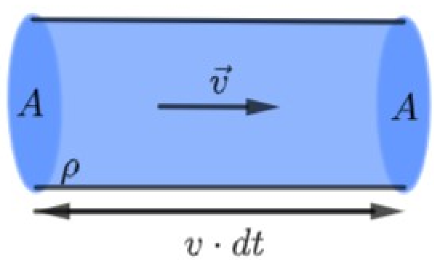
Abner Maia - Projeto Olímpicos

1. Introdução

Em sequência à hidrostática, a hidrodinâmica (ou dinâmica dos fluidos) estuda o movimento dos fluidos em geral. Devido a complexidade do assunto, nossa análise será restrita a algumas situações ideais, geralmente líquidos incompressíveis, não viscosos e em **escoamento estacionário** (o escoamento do fluido é classificado como estacionário ou em **regime permanente** quando a velocidade do fluido não varia com o tempo $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$, ou seja, a velocidade só depende da posição). Em um escoamento **turbulento**, por exemplo, a água numa cachoeira, a velocidade $\vec{v}$ varia de forma extremamente rápida e irregular.

2. Conservação da massa - Equação da continuidade

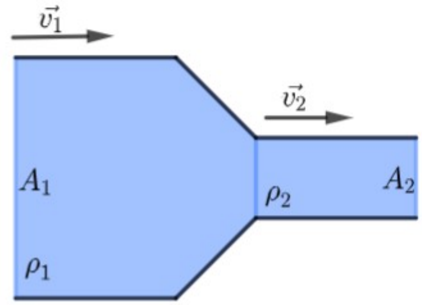
A seguir, vamos considerar um pequeno trecho de tubulação cilíndrica por onde escoa um líquido incompressivel.



A massa dm que atravessa o fluido num intervalo de tempo infinitésimo será dada por:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho A\, v\, dt.$$

Considerando agora um escoamento estacionario e uma porção de tubo entre duas áreas A_1 e A_2 com com densidades ρ_1 e ρ_2.



Pelo fato do escoamento ser estácionário, a massa do fluido contida entre as secções A_1 e A_2 não pode variar com o tempo, ou seja, em um mesmo intervalo de tempo dt a massa dm_1 que entra pela área A_1 tem que ser igual a massa que sai do tubo dm_2 pela área A_2, portanto, temos que:

$$dm_1 = \rho_1\, A_1\, v_1\, dt = dm_2 = \rho_2\, A_2\, v_2\, dt,$$

o que dá:

$$\rho_1\, A_1\, v_1 = \rho_2\, A_2\, v_2.$$

Se o fluido é incompressivel temos que ρ é constante, segue-se que:

$$A_1\, v_1 = A_2\, v_2.$$

– *Vazão*

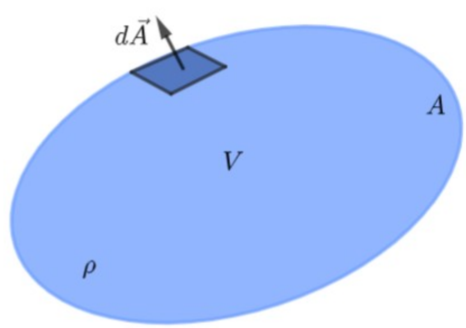
A produto $A\, v =$ constante mede o volume de fluido que atravessa a secção transversal do tubo por unidade de tempo, portanto:

$$Z = A\, v = \frac{dV}{dt},$$

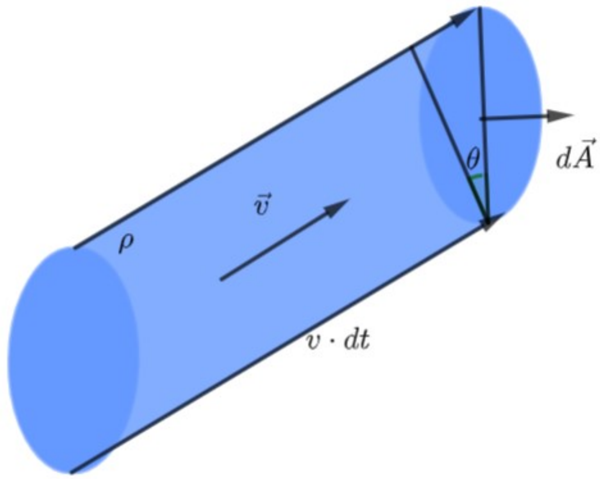
onde Z é chamado de **vazão**. Sua unidade de medida no **Sistema Internacional** é $m^3\, s^{-1}$.

– *Caso geral da conservação da massa*

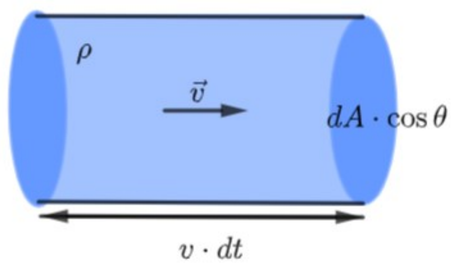
Agora, vamos formular o princípio de conservação da massa no caso geral do escoamento não-estacionário de um fluido compressível. Considerando um volume V fixo do fluido, limitado por uma superfície fechada A. Seja $\vec{A}$ um vetor normal a área cuja intensidade tem o mesmo valor númerico da área.



A massa dm que atravessa dA num intervalo infinitesimal dt pode vista da seguinte forma:



Como as áreas são infinitesimais, podemos projetar a área dA na direção normal a velocidade, de modo que teremos um cilindro de configuração semelhante ao primeiro caso:



Cuja porção de massa que o atravessa vale:

$$dm = \rho\, v\, dt\, dA\, \cos\theta.$$

Com uma simples geometria achamos que o ângulo entre a velocidade e o vetor área também é θ, então temos que $v\, dA\, \cos\theta = \vec{v} \cdot d\vec{A}$ que é o **produto escalar** entre os vetores $\vec{v}$ e $d\vec{A}$, daí segue-se que:

$$dm = \rho\, dt\, \vec{v} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

temos que $\rho\, \vec{v} \cdot d\vec{A}$ representa o fluxo de massa que sai do volume V através de dA por unidade de tempo. Além disso, a massa total dentro do volume V é:

$$m = \int_V \rho dV.$$

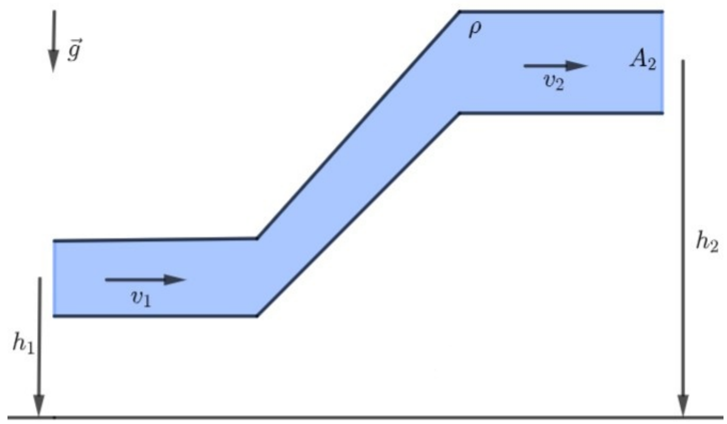
A massa pode variar com o tempo, porém, como ela não pode ser criada nem destruída, essa variação só pode ser devida ao **fluxo** resultante na superfície A por unidade de tempo. Portanto temos que:

$$\oint_A \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{A} = -\frac{dm}{dt} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho\, dV.$$

O sinal negativo deve-se porque, se adotarmos o fluxo para fora como positivo, $\frac{dm}{dt} < 0$. Essa expressão é a lei da conservação da massa num fluido, chama-se **Equação da Continuidade**, perceba que, se tomarmos uma porção de tubo corrente como foi feito anteriormente o primeiro membro se reduz a $\rho_2 A_2 v_2 - \rho_1 A_1 v_1$.

3. Equação de Bernoulli

Vamos aplicar a lei de **conservação da energia** para um fluido incompressível em escoamento estacionário:



Considerando um tubo de corrente limitado pelas secções transversais de áreas A_1 e A_2, onde temos as velocidades v_1 e v_2, as pressões p_1 e p_2 e alturas h_1 e h_2 em relação a um ponto horizontal de referência, O trabalho das forças de pressão vale:

$$\tau_f = p_1 A_1 \, v_1 dt - p_2 A_2 \, v_2 dt,$$

o sinal de negativo deve-se ao fato de que o deslocamento na região 2 é contrário as forças de pressão. Além disso, o trabalho realizado pelas forças gravitacionais é:

$$\tau_p - dU = -g(dm_2 \, h_2 - dm_1 \, h_1),$$

além disso, sabemos que a variação da energia cinética correspondente a esse transporte vale:

$$\tau_p + \tau_f = dT = \frac{1}{2} dm_2 \, v_2^2 - \frac{1}{2} dm_1 \, v_1^2.$$

Igualando os resultados obtidos, temos que:

$$\frac{1}{2} dm_2 \, v_2^2 - \frac{1}{2} dm_1 \, v_1^2 = p_1 A_1 \, v_1 \, dt - p_2 A_2 \, v_2 dt - g(dm_2 \, h_2 - dm_1 \, h_1)$$

Além disso, $A_1 \, v_1 \, dt = \frac{dm_1}{\rho}$ e $dm_1 = dm_2$, o que resulta em:

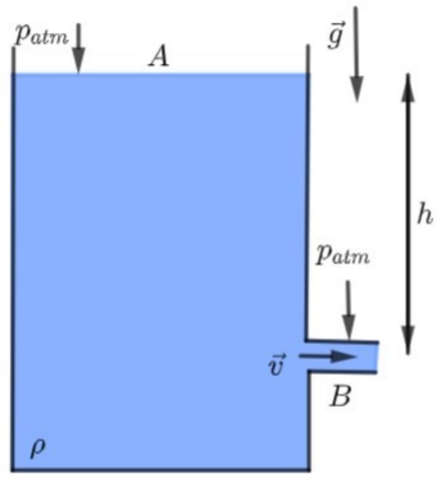
$$\frac{1}{2} \rho_2 \, v_2^2 + p_2 + \rho \, g \, h_2 = \frac{1}{2} \rho_1 \, v_1^2 + p_1 + \rho \, g \, h_1 = C.$$

Relação que exprime a **conservação da energia por unidade de massa** ao longo do filete, essa relação é chamada de **Equação de Bernoulli**.

3.1 *Aplicações*

– *Fórmula de Torricelli*

Consideremos um reservatório contendo líquido, em cuja parede lateral há um pequeno orifício circular através do qual o líquido se escoa.



Como o orifício é muito pequeno, o nível de água do reservatório baixa muito lentamente assim podemos desprezar sua velocidade. Aplicando a **Equação de Bernoulli** entre um ponto inicial A e um ponto B na parte cilíndrica do jato, onde a pressão volta a ser p_{atm} temos que:

$$\frac{1}{2}\rho\, v_0^2 + p_{atm} + \rho\, g\, h = \frac{1}{2}\rho\, v^2 + p_{atm}$$

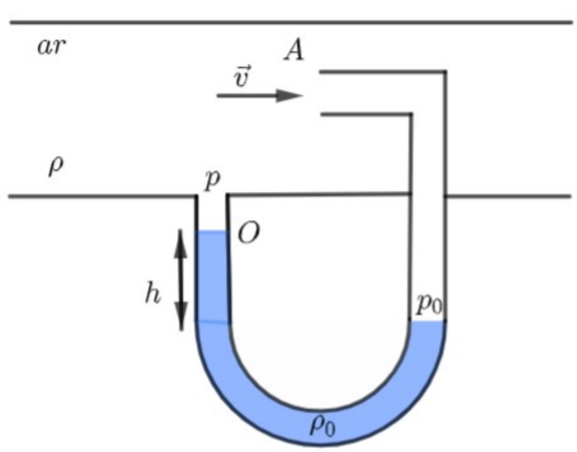
Como $v_0 \approx 0$ obtemos que:

$$v = \sqrt{2\, g\, h}.$$

Este resultado foi obtido por Torricelli em 1636.

– *Tubo de Pitot*

Usado para medir a pressão ou velocidade num fluido em movimento, considere a seguinte situação:



Onde ρ é a densidade do ar, p a pressão naquela região, ρ_0 a densidade do líquido e p_0 é a pressão no ponto O. Aplicando Bernoulli nos pontos A e O temos que:

$$\frac{1}{2}\rho\, v^2 + p = p_0,$$

além disso, pelo **Teorema de Stevin** sabemos que:

$$p_0 = \rho_0\, g\, h + p \Rightarrow \frac{1}{2}\rho\, v^2 + p = p + \rho_0\, g\, h,$$

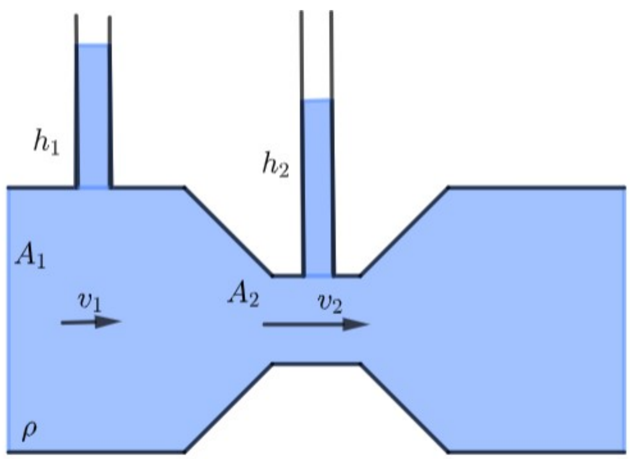
o que permite medir a velocidade v de escoamento do fluido, segue-se que:

$$v = \sqrt{2\frac{\rho_0}{\rho}\, g\, h}.$$

Este sistema é usado para medir a velocidade de aviões.

– *Fenômeno de Venturi*

Consideremos o escoamento estacionário de um fluido incompressível da seguinte maneira:



Sejam A_1 e A_2 as áreas de secção na região 1 e na região 2 e supondo que elas sejam pequenas suficientemente para que a pressão e a velocidade possam ser tomadas como constantes sobre elas, podemos aplicar Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

e a Equação da Contunidade dá:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}\, v_2.$$

De modo que, $v_2 > v_1$ e consequentemente, $p_2 < p_1$. Venturi, quem primeiro observou o fenômeno, esperava obter o contrário, acreditando que a pressão aumentaria no estrangulamento devido ao espaço reduzido.

Subistituindo v_2 na equação do Bernoulli obtemos que:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2\, \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

o líquido sobe até as alturas h_1 e h_2 em manômetros inseridos nos pontos 1 e 2, o que permite medir a diferença de pressão:

$$p_1 - p_2 = (p_0 + \rho\, g\, h_1) - (p_0 + \rho\, g\, h_2) = \rho\, g(h_1 - h_2) = \rho\, g\, h$$

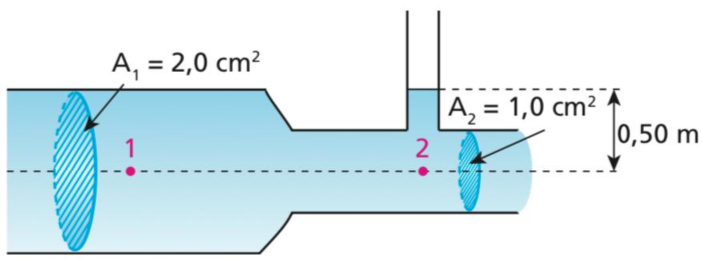
onde h é a diferença entre as alturas, substituindo na última expressão, obtemos que:

$$\rho\, g\, h = \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2\, \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

$$\rho\, g\, h = \frac{1}{2}\rho\, v_1^2\, (\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}) \Rightarrow v_1 = A_2\sqrt{\frac{2\, g\, h}{A_1^2 - A_2^2}}.$$

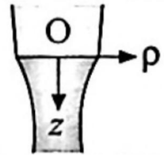
4. Problemas

Problema 1. * (Tópicos da Física 1) Na tubulação horizontal esquematizada na figura a seguir o líquido escoa com vazão de $400\, cm^3/s$ e atinge a altura de 0,50 m no tubo vertical. A massa específica do líquido, admitido ideal, é $1{,}0\, g/cm^3$.



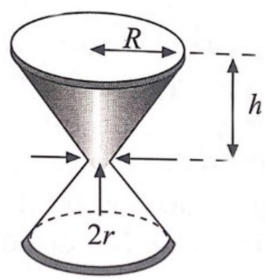
Adotando-se $g = 10\, m/s^2$ e supondo-se o escoamento em regime permanente, pede-se calcular a pressão efetiva no ponto 1, que é a diferença entre a pressão estática nesse ponto e a pressão atmosférica.

Problema 2. ** (Moysés) Um filete de água escorre verticalmente de uma torneira de raio a, com escoamento estacionário de vazão Q. Ache a forma do jato de água que cai, determinando o raio ρ da seção transversal em função da alturas de queda.

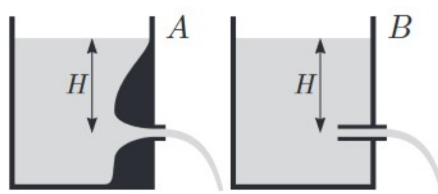


Problema 3. * (Tópicos da Física 1) O ar de um furacão sopra sobre o telhado de uma casa com velocidade de módulo igual a $108\, km/h$. A densidade do ar vale $1{,}2\, kg/m^3$. Quanto vale a diferença entre a pressão do lado interno e do lado externo do telhado?

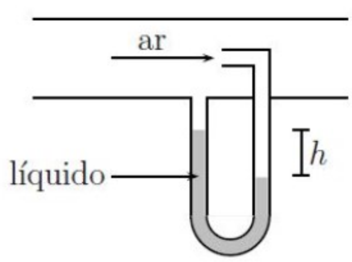
Problema 4. ** (Moysés) Uma ampulheta é formada, de cada lado, por um tronco de cone circular de altura $h = 10\,cm$, raio da base maior $R = 10\,cm$ e o raio menor $r = 0{,}1\,cm$. Após enchê-la de água até a metade, ela é invertida.(a) Calcule a velocidade inicial de descida do nível da água; (b) calcule a velocidade do descida do nível depois de ele ter baixado de $5\,cm$; (c) que forma deveria ter a superfície lateral (de revolução) da ampulheta para que o nível da água baixasse uniformemente (relógio de água)?



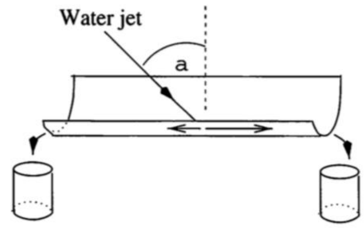
Problema 5. *** (Jaan Kalda) Sejam dois recipientes (A e B) cujas torneiras têm desenho diferente, veja a figura. As torneiras estão abertas e a altura da superfície da água em relação a elas é H em cada recipiente. Com que velocidade o fluxo de água sai dos barris?



Problema 6. * (ITA 2016) Um estudante usa um tubo de Pitot esquematizado na figura para medir a velocidade do ar em um túnel de vento. A densidade do ar é igual a $1{,}2\,kg/m^3$ e a densidade do líquido é $1{,}2.10^4\,kg/m^3$, sendo $h = 10\,cm$. Nessas condições, determine quanto vale, aproximadamente, a velocidade do ar.



Problema 7. *** Um jato de água atinge obliquamente uma calha horizontal de seção transversal semicircular, como mostrado na figura. O jato encontra-se no plano vertical que contém a linha central da calha. Calcule a relação das quantidades de água que escoam nas duas extremidades da calha em função do ângulo de incidência α do jato.



5. Gabarito

Problema 1 $1{,}1 \cdot 10^4\, N/m^2$

Problema 2 $\dfrac{\rho^2}{a^2} = \dfrac{v}{\sqrt{v^2 + 2gz}}$, onde $Q = \pi\, a^2\, v$

Problema 3 $540\, Pa$

Problema 4 a) $0{,}14\, mm/s$ b) $0{,}39\, mm/s$ c) $z = \dfrac{v^2}{2g}\dfrac{\rho^4}{r^4}$

Problema 5 A: $\sqrt{2\, g\, h}$ B: $\sqrt{g\, h}$

Problema 6 $1{,}4 \cdot 10^2\, m/s$

Problema 7 a) $v = v_1 = v_2$ b)$\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$