Hidrostática

Abner Maia - Projeto Olímpicos

1. Introdução

A hidrostática ou estática dos fluidos é a parte de Mecânica que estuda os fluidos em equilíbrio. Classificamos como **fluidos**, indistintamente, os líquidos e gases. Um líquido tem volume bem definido, mas não a forma, mantendo seu volume, ele se amolda ao recipiente que o contém. Já um gás não tem forma nem volume bem definidos, expandindo-se até ocupar todo o volume do recipiente que o contém. Como estamos interessados em substâncias sem forma definida, é mais útil falar em **massa específica** e **pressão** do que em massa e força.

1.1 *Massa Específica*

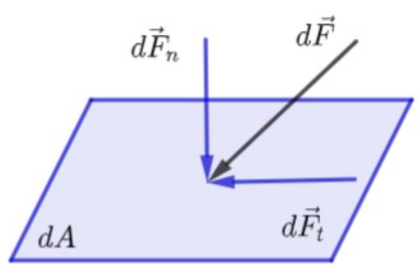
Para medirmos a massa específica de um fluido em determinado ponto do espaço pegamos um pequeno volume dV e medimos a massa dm de fluido contida nesse elemento de volume, a massa específica é dada por:

$$\rho = \frac{dm}{dV}.$$

Sua unidade no Sistema Internacional é kg$\cdot$ m^{-3}. Em muitos casos a massa específica é a mesma para todos os elementos do corpo, então temos:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

1.2 *Pressão*



Definimos a **pressão** que um elemento de força $d\vec{F}$ exerce num elemento de area dA como:

$$p = \frac{dF_n}{dA}.$$

A unidade de medida da pressão no Sistema Internacional é N$\cdot$ m^{-2} que recebe o nome de **pascal** (Pa), porém algumas outras unidades que não pertencem ao SI são muito utilizadas na prática, veremos a relação entre o pascal e elas a seguir:

$$1\,atm = 1{,}01 \cdot 10^5\,Pa = 760\,mmHg.$$

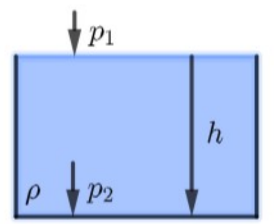
1 atmosfera (1 atm) como o nome já diz é a pressão média aproximada da atmosfera ao nivel do mar.

2. Fluido incompressível no campo gravitacional

2.1 *Teorema de Stevin*

Também conhecido por **Lei Fundamental da Hidrostática**, o Teorema de Stevin diz que para um liquido homogêneo em equilíbrio submetido à um campo gravitacional constante g a diferença de pressão entre os pontos 1 e 2 é dada por:

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot h.$$



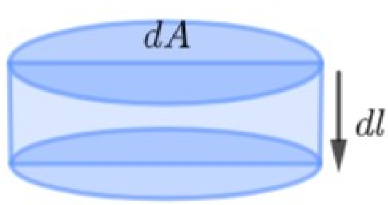
Como consequência desse teorema temos que todos os pontos de um liquido em equilíbrio sob a ação da gravidade em um mesmo nivel horizontal, suportam **a mesma pressão**:

$$p_2 - p_1 = 0 \Rightarrow p_2 = p_1.$$

– *Demonstração*

Observação: para a seguinte demonstração será utilizado um pouco de cálculo.

Pegando um cilindro infinitesimal, paralelo à $\overrightarrow{g_{ef}}$ (gravidade efetiva), de área dA, comprimento dl e massa dm.



Escrevendo o equilibrio das forças na vertical:

$$p \cdot dA + dm \cdot g_{ef} = (p + dp) \cdot dA = p \cdot dA + dp \cdot dA,$$

como $dm = \rho \cdot dA \cdot dl$, temos:

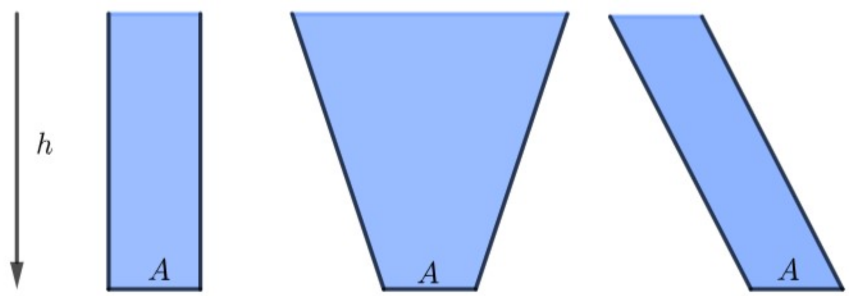
$$\rho \cdot g_{ef} \cdot dl \cdot dA = dp \cdot dA \Rightarrow dp = \rho \cdot g_{ef} \cdot dl,$$

para ρ constante, integrando dos 2 lados obtemos:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \rho \cdot g \int_0^h dl \Rightarrow p_2 - p_1 = \rho \cdot g_{ef} \cdot h$$

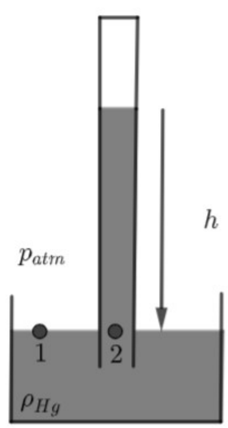
2.2 *Paradoxo hidrostático*

Como consequência da Lei de Stevin, se tivermos recipientes de formas muito diferentes, mas de mesma área da base A e altura h do líquido, a força exercida sobre a base é a **mesma** já que a pressão só depende da altura, logo a pressão exercida sobre a base é a mesma em todas as situações.



2.3 *Pressão atmosférica e experimento de Torriceli*

A partir dos conhecimentos do Teorema de Stevin, o cientista italiano Evangelista Torricelli propôs uma forma bastante simples de determinar o valor da pressão atmosferica. Torriceli afirmou: "Vivemos no fundo de um oceano de ar, que, conforme mostra a experiência, sem dúvida tem peso."



Torriceli previu que esta pressão era suficiente para elevar uma coluna de mercúrio a uma altura de $\approx 76\,cm$ da seguinte forma (veja a figura acima): um tubo de vidro de aproximadamente 1 m de comprimento fechado numa extremidade e cheio de mercúrio com a outra extremidade vedada, foi invertido numa cuba de mercúrio, em seguida destampou sua extremidade. Com isso, parte do mercúrio escoa para a cuba, até que seja estabelecido o equilibrio do sistema. Vamos chamar de ρ_{Hg} a massa específica do mercúrio, g o módulo da aceleração da gravidade, p_{atm} a pressão atmosférica local e h a altura do nível de mercúrio no tubo.

Sejam p_1 e p_2 as pressões nos pontos **1** e **2**, pelo fato de p_1 estar no nivel livre de mercúrio e em contato com a atmosfera temos:

$$p_1 = p_{atm}.$$

No ponto **2** a pressão se deve a coluna de mercúrio que ai se sobrepõe, portanto pelo Teorema de Stevin temos:

$$p_2 = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h$$

Como os pontos **1** e **2** estão na mesma linha horizontal, ou seja, numa região isobárica temos que:

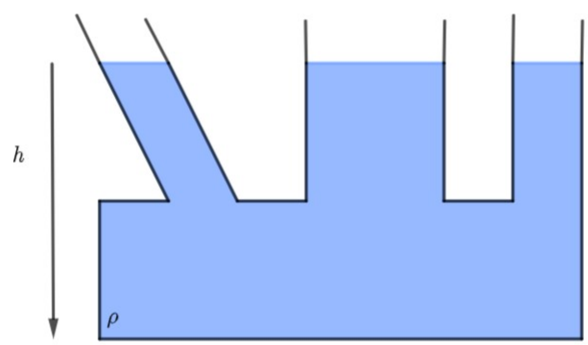
$$p_2 = p_1 \Rightarrow p_{atm} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h$$

Ao nivel do mar, com $g \approx 9{,}81 m/s^2$ obtém-se para **h** um valor muito próximo de 76,0 cm, como $\rho_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^3\, kg/m^3$ temos:

$$p_{atm} = 13{,}6 \cdot 10^3\, \frac{kg}{m^3} \cdot 9.81\, \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}760\, m \Rightarrow p_{atm} \approx 1{,}01 \cdot 10^5\, \frac{N}{m^2}$$

2.4 *Vasos comunicantes*

Se um recipiente é formado por diversos ramos que se comunicam entre si, a superfície livre do líquido que ocupa o recipiente é horizonta, ou seja, o líquido sobe à mesma altura em todos os ramos, isso resulta imediatamente da Lei de Stevin.



3. O Teorema de Pascal

Esse teorema afirma que um incremento de pressão comunicado a um ponto qualquer de um líquido incompressível em equilíbrio **transmite-se integralmente** a todos os demais pontos do líquido, portanto, se produzirmos uma variação de pressão Δp em um ponto, a pressão de todos os demais pontos do líquido varia por Δp.

3.1 Demonstração

Sejam p_1 e p_2 a pressão dos pontos **1** e **2** de um líquido homogêneo em equilíbrio sob a ação da gravidade separados a uma altura h, sabemos que:

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot h.$$

Se o ponto 1 sofrer um aumento de pressão Δp temos que:

$$p_{1d} = p_1 + \Delta p \Rightarrow p_{2d} - p_{1d} = \rho \cdot g \cdot h = p_2 - p_1.$$

Ou seja,

$$p_{2d} - p_{1d} = p_2 - p_1 \Rightarrow p_{2d} - p_1 - \Delta p = p_2 - p_1,$$

portanto:

$$p_{2d} = p_2 + \Delta p$$

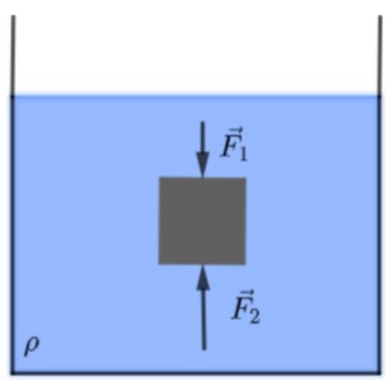
4. Empuxo

4.1 Empuxo Arquimediano

Ao imergirmos um corpo sólido num fluido em equilíbrio, devido a pressão do líquido, vão surgir diversas forças superficiais atuando sobre a superfície S desse corpo. A resultante dessas forças superfíciais é chamada de **empuxo** e tem que ser igual e contrária ao peso da porção de fluido deslocada pelo objeto.

– *Demonstração*

A seguir faremos a demonstração para o caso especial de um cílindro:



Considere um líquido homogêneo de massa específica ρ contido no recipiente da figura, seja também um cilindro de altura h e área A.

Por estar envolvido pelo líquido o cilindro recebe forças horizontais dos 2 lados, porém, devido a simetria elas se cancelam. Na vertical temos as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$, a resultante dessas forças aponta para cima (pois a pressão é maior embaixo, devido a Lei de Stevin) e é chamada de **empuxo**. Escrevendo o equilibrio das forças temos:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{E} \Rightarrow F_2 - F_1 = E.$$

Aplicando o Teorema de Stevin nos pontos 1 e 2:

$$p_2 - p_1 = \frac{F_2}{A} - \frac{F_1}{A} = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow F_2 - F_1 = \rho \cdot g \cdot h \cdot A = \rho \cdot g \cdot V.$$

Portanto:

$$E = \rho \cdot g \cdot V.$$

Ademais, sabemos que o volume do liquido deslocado é igual ao volume do sólido imerso, segue-se que:

$$E = \rho \cdot g \cdot V_d$$

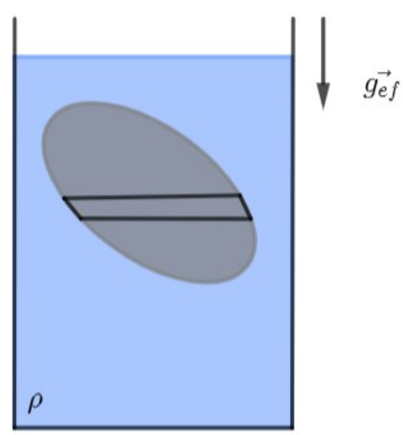
Onde V_d é o volume do líquido deslocado. Entretanto, $\rho \cdot V_d = m_d$ (massa do líquido deslocado) assim, obtemos:

$$E = \rho \cdot g \cdot V_d = m_d \cdot g \Rightarrow E = P_d.$$

– ***Caso Geral***

Observação: para a seguinte demonstração será utilizado um pouco de cálculo.

Considere um corpo de formato qualquer imerso em um líquido de densidade ρ constante, analisando um pequeno elemento de volume do corpo de área $A(l)$ e espessura dl.



Temos que:

$$dF = dp \cdot A(l).$$

De acordo com a demonstração da Lei de Stevin temos:

$$\rho \cdot g_{ef} \cdot dl = dp \Rightarrow dF = \rho \cdot g_{ef} \cdot A(l) \cdot dl = \rho \cdot g_{ef} \cdot dV,$$

integrando dos 2 lados temos:

$$\int_0^E dF = \rho \cdot g_{ef} \int_0^V dV \Rightarrow E = \rho \cdot g_{ef} \cdot V$$

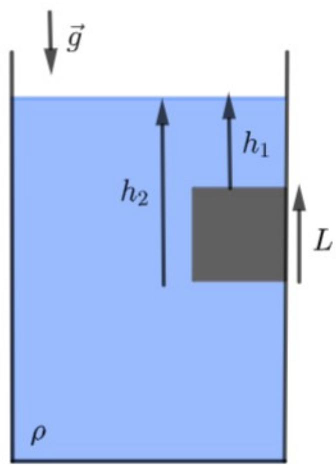
4.2 *Empuxo Não Arquimediano*

Esse tipo de empuxo ocorre quando parte do objeto não está em contato com o fluido, assim, se tivermos um objeto com uma parte dentro e uma parte fora em um recipiente preenchido com um liquido, somente a parte de dentro do recipiente receberá a resultante das pressões.

Por exemplo, se tivermos um objeto no fundo ou na parede de um recipiente e ele estiver perfeitamente encostado, essa região não recebe a resultante das pressões, sendo assim um empuxo não arquimediano, entretando, em situações como essa, o mais comum é que o objeto não esteja perfeitamente encostado, ou seja, tem um pequeno espaçamento entre as superfícies de forma que todo o cilindro esteja submetido as pressões do líquido. A seguir resolveremos um exemplo:

– *Exemplo 01:*

Na figura a seguir, temos um bloco imerso em um liquido de densidade ρ, perfeitamente encostado na parede do recipiente. Vamos calcular o empuxo resultante:



No eixo y as forças são as mesmas do caso anterior logo:

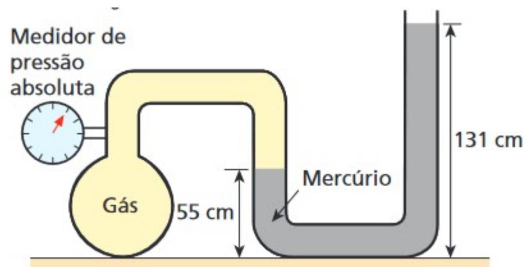
$$E_y = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot L^3$$

No eixo x, como não temos liquido do outro lado, as forças não se cancelam mais. Como a pressão varia **linearmente** com a altura, podemos pegar a pressão média e multiplicar pela área e teremos o empuxo no eixo x:

$$E_x = (p_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_{med}) \cdot L^2 = (p_{atm} + \rho \cdot g \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}) \cdot L^2$$

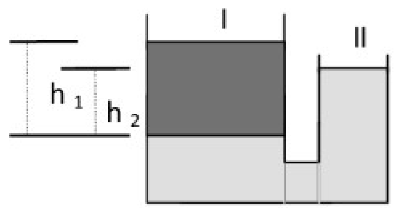
5. Problemas

Problema 1. *(Tópicos da Física 1) A medição da pressão atmosférica reinante no interior de um laboratório de Física foi realizada utilizando-se o dispositivo representado na figura:

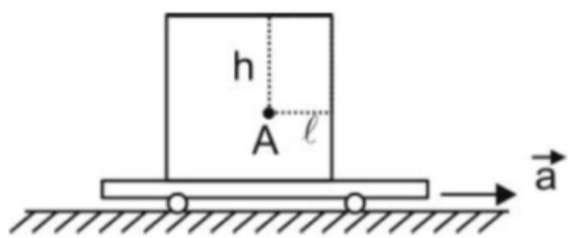


Sabendo que a pressão exercida pelo gás, lida no medidor, é de 136 cm Hg, determine o valor da pressão atmosférica no local.

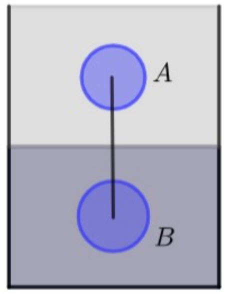
Problema 2. **(ITA 1992) Dois vasos comunicantes contêm dois líquidos não miscíveis, I e II, de massas específicas d_1 e d_2, sendo $d_1 < d_2$, como mostra a figura. Qual é a razão entre as alturas das superfícies livres desses dois líquidos, contadas a partir da sua superfície de separação?



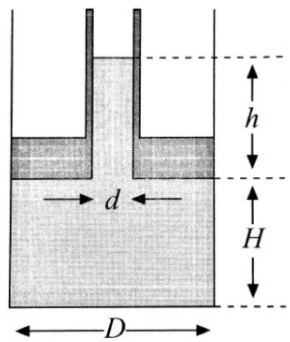
Problema 3. ** Em um carrinho, situa-se um tanque cúbico totalmente cheio de água. O carrinho movimenta-se com aceleração constante $\vec{a}$. Determine a pressão a uma profundidade h, no ponto A, distante da parede frontal de uma distância l, se o tanque está fechado hermeticamente por uma tampa. (No movimento uniforme, a tampa não exerce pressão na água)



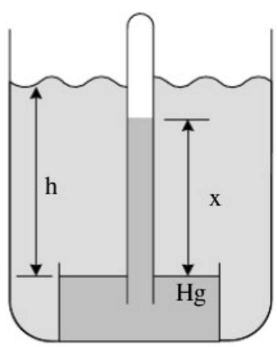
Problema 4. **(Tópicos da Física 1) Na figura, as esferas maciças **A** e **B** estão ligadas por um fio ideal e o sistema está em equilíbrio. A esfera **A** está no interior de um líquido homogêneo de densidade $2d$ e a esfera **B** está no interior de outro líquido homogêneo de densidade $3d$. Sabendo que as esferas têm raios iguais e que a esfera **A** tem densidade d, quanto vale a densidade da esfera **B**?



Problema 5. ***(Moysés) Um pistão é constituído por um disco ao qual se ajusta um tubo oco cilíndrico de diâmetro d,e está adapatado a um recipiente cilíndrico de diâmetro D. A massa do pistão com tubo é M e ele está inicialmente no fundo do recipiente. Despeja-se então pelo tubo uma massa m de líquido de densidade ρ. Em consequência, o pistão se eleva a uma altura H A altura de coluna de líquido dentro do tubo de diamtro d é h. Calcule H

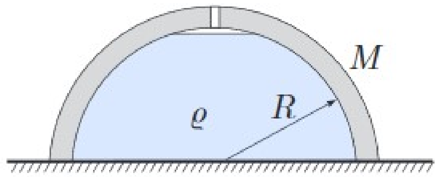


Problema 6. **(ITA 2003) Num barômetro elementar de Torricelli, a coluna de mercúrio possui uma altura H, que se altera para x quando este barômetro é mergulhado num líquido de densidade D, cujo nível se eleva a uma altura h, como mostra a figura. Sendo d a densidade do mercúrio, **DETERMINE** em função de H, D e d a altura do líquido, no caso de esta coincidir com a altura x da coluna de mercúrio.



Problema 7. ****(Jaan Kalda) Um recipiente hemisférico é colocado de cabeça para baixo em uma superfície horizontal lisa. Por meio de um pequeno orifício no fundo do recipiente, a água é despejada. Exatamente quando o recipiente fica cheio, a água começa a vazar entre a mesa e

a borda do recipiente. Encontre a massa do recipiente se a água tiver densidade ρ e se o raio do hemisfério é R.



6. Gabarito

Problema 1 $60\,\text{cm}\,\text{Hg}$

Problema 2 $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{d_2}{d_1}$

Problema 3 $\rho \cdot (g \cdot h + a \cdot l)$

Problema 4 $4d$

Problema 5 $H = \dfrac{4}{\pi \rho D^2}(m - \dfrac{Md^2}{D^2 - d^2})$

Problema 6 $h = \dfrac{d \cdot H}{d - D}$

Problema 7 $M = \dfrac{\rho \cdot \pi \cdot R^3}{3}$