Lançamento Oblíquo

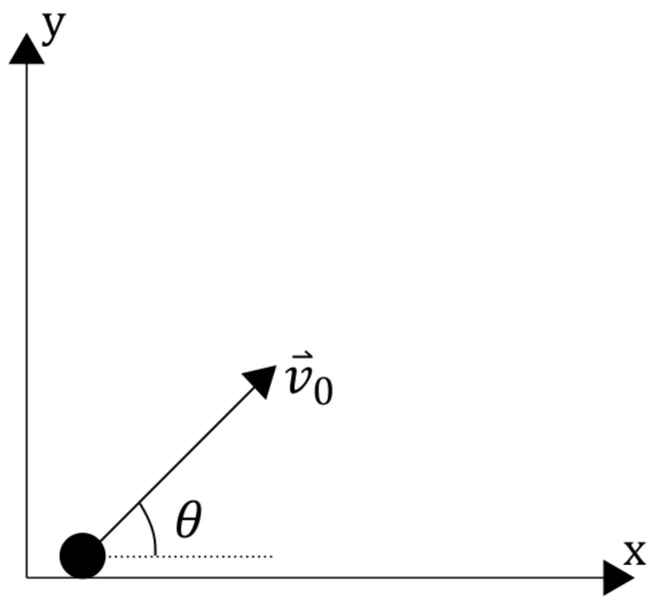
Caio Augusto - Projeto Olímpicos

1. Introdução

Lançamento Oblíquo é o nome dado ao movimento de uma partícula quando esta sofre efeito de uma aceleração gravitacional constante. Exemplos são mostrados abaixo, onde diversos objetos são lançados com um ângulo com a horizontal e percorrem uma trajetória específica.

A física ao redor desse assunto se baseia na seguinte pergunta: Se um objeto está inicialmente no chão e no tempo $t = 0$ recebe uma velocidade $\vec{v}$ fazendo um ângulo θ com a horizontal, qual é sua posição em um tempo t?

Descrevemos o sistema por meio de duas coordenadas x e y, onde y é vertical e x é a horizontal, como mostrado na imagem abaixo.



A componente da velocidade inicial que esta na direção x é dada por:

$$v_x = v_0 \cos\theta \tag{1}$$

E sabemos que a gravidade atua apenas na vertical, então o movimento em x não sofre influência de nenhuma aceleração, seu movimento na horizontal é portanto uniforme:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t \tag{2}$$

Já na vertical, a componente da velocidade inicial é dada por:

$$v_y = v_0 \sin\theta \tag{3}$$

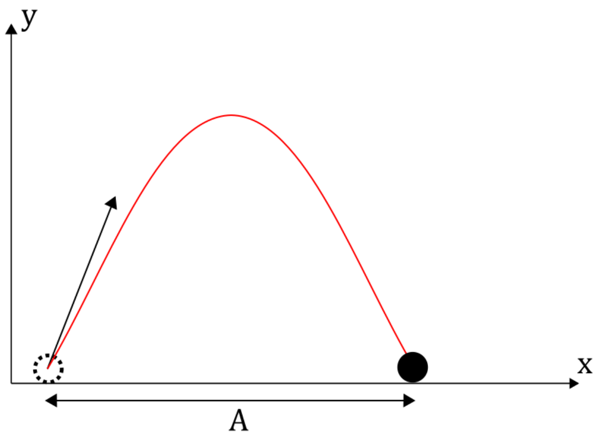
E nessa direção a partícula sofre ação de uma aceleração constante g, e portanto seu movimento em y deve ser um movimento uniformemente variado (MUV), isto é:

$$y(t) = v_0 \sin(\theta)t - \frac{gt^2}{2} \tag{4}$$

Essencialmente, essas são as duas equações que descrevem um movimento oblíquo, em y a partícula está em um MUV e em x num MU. No entanto, saber apenas isso em muitas vezes não te permite resolver as questões, torna-se um quesito de extrair a maior quantia de informações possíveis das equações (2) e (4), discutiremos alguns dados que podem ser obtidos na seção abaixo:

2. Alcance horizontal e Altura Máxima

O alcance horizontal de um lançamento oblíquo é definida como a distância entre o ponto de lançamento e o ponto que ela atinge quando volta a $y = 0$, como mostra a figura abaixo.



Para calcular o valor de A dado os parâmetros relevantes ao sistema, precisamos saber o tempo de queda da partícula, ou seja, qual o valor de T tal que $y(T) = 0$. Para calcular T, fazemos a seguinte conta:

$$y(T) = v_0 \sin(\theta)T - \frac{gT^2}{2} = 0 \tag{5}$$

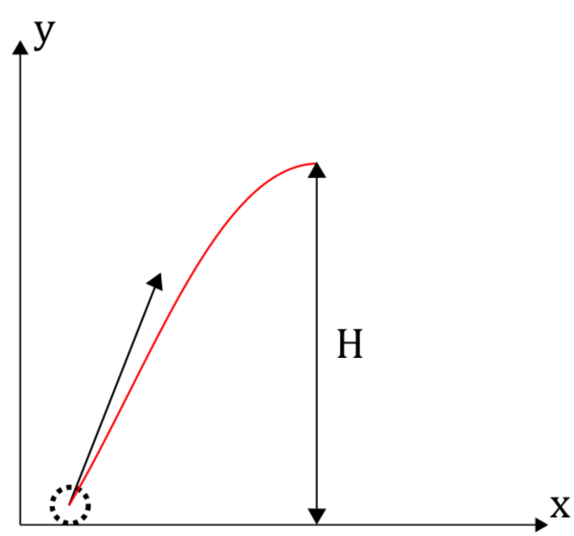
Esta equação possui duas soluções, uma corresponde a $T = 0$ e não corresponde ao tempo de queda da partícula. Para achar o outro valor, divide-se toda a equação por T e tem-se então:

$$T = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g} \tag{6}$$

como $x(T) = A$, substituímos T na equação de x e temos que:

$$A = \frac{2v_0^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \tag{7}$$

Já a altura máxima corresponde ao maior valor de y que a partícula pode ter durante seu movimento, como mostrado na figura abaixo:



Pela definição de máximo, quando a partícula está em H ela não possui velocidade em y (pois imediatamente antes de estar H ela devia estar subindo e imediatamente depois ela deve estar descendo, então no máximo em si ela não pode subir nem descer). Então podemos prosseguir de duas maneiras:

2.1 *Maneira 1 - Descobrir* $v_y(t)$

Como em y a partícula faz um MUV, segue que:

$$v_y(t) = v_0 \sin(\theta) - gt \tag{8}$$

então a partícula terá $v_y = 0$ em:

$$\tau = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} = \frac{T}{2} \tag{9}$$

Ou seja, a partícula atinge o máximo na metade do seu percurso no ar, e então segue que $H = y(\tau)$, logo:

$$H = v_0 \sin(\theta)\tau - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g} \tag{10}$$

2.2 *Maneira 2 - Uso de Torricelli/Conservação de energia*

A equação de Torricelli nos diz que, para uma partícula sobre aceleração a em x obedece:

$$v^2(x) = v_0^2 + 2ax \tag{11}$$

Onde v_0 é a velocidade inicial da partícula quando ela esta em $x = 0$ e $v(x)$ é sua velocidade em um x qualquer. O uso desta equação nos permite ignorar a dependência do tempo do fenômeno.

No nosso caso, há uma aceleração $-g$ na direção y e $v_y(0) = v_0 \sin(\theta)$, então:

$$v_y^2 - v_0^2 \sin^2(\theta) = -2gy \tag{12}$$

Quando $y = H$, $v_y = 0$, então:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g} \tag{13}$$

O que esta de acordo com o primeiro método.

3. Trajetória independente do tempo

Nos interessa também saber qual é a curva que a massa faz no espaço durante sua trajetória, isto é, quando a partícula esta em um determinado x, em qual altura y(x) ela estará? Para ter esta informação, usamos a equação (2) e isolamos t:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)} \tag{14}$$

E então substituímos na equação de y(t), o que nos da:

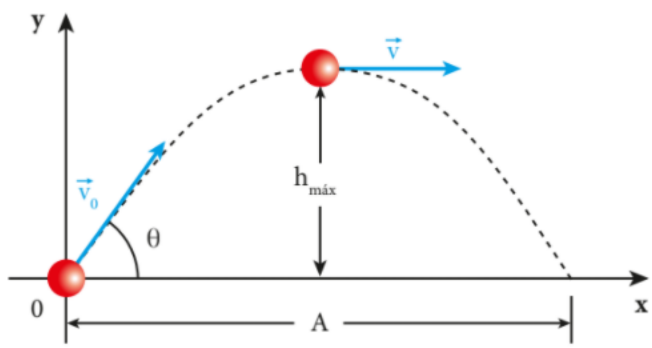
$$y(x) = x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} \tag{15}$$

Não é uma equação que você olha e pensa: “puts, como não imaginei que seria isso", mas ela não veio de nenhuma magia, foi pego as equações iniciais que tínhamos inicialmente e fizemos uma substituição de variáveis. Há alguns dados importantes que podem ser tirados dessa equação, uma delas é que a trajetória é uma parábola pois temos algo da forma $y = ax + bx^2$, outro conceito muito importante é o de “Parábola de segurança", o qual trataremos em um folheto mais a frente, mas é simples de achar na internet uma explicação simples do que ela significa, embora de sua matemática nem tanto.

4. Problemas

Mostrado como as fórmulas podem ser utilizadas, vamos agora a uma lista curta de alguns exercícios sobre o assunto, algumas são mais simples e envolvem apenas um manejamento simples das fórmulas, outras envolvem um bom conhecimento matemático.

Problema 1: (Tópicos de Física 1)-Um corpo é lançado obliquamente com velocidade v0 de módulo 50 m/s, sob um ângulo de lançamento θ (sen(θ)= 0,6; cos(θ)=0,8), conforme indica a figura:



Calcule, considerando $g = 10 m/s^2$ e desprezando a influência do ar:

a) a intensidade da velocidade v do corpo ao passar pelo vértice do arco de parábola;

b) o tempo de subida;

c) a altura máxima (hmáx);

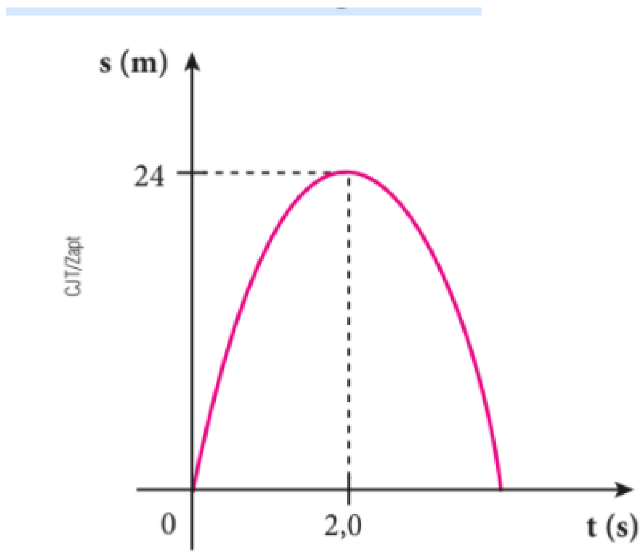
d) o alcance horizontal (A).

Problema 2: (Tópicos de Física 1)-Da superfície de um astro, uma pedra foi lançada verticalmente para cima. Sua posição em relação à superfície variou com o tempo, de acordo com o gráfico seguinte, que é praticamente um arco de parábola:

Calcule:

a) o módulo v0 da velocidade de lançamento da pedra;

b) intensidade g do campo gravitacional na superfície desse astro.



Problema 3: (Moyses 1- alterada) Um caçador(muito cruel) esta no chão e planeja atirar em um macaco que esta em um galho de uma arvore a uma altura h do chão. A distância horizontal entre o macaco e o caçador é d, a velocidade inicial da bala é v_0, o valor da gravidade é g e, na hora que o caçador atirar, o macaco ficara assustado e se soltara do galho, ficando em queda livre. Sabendo disso, qual deve ser o angulo com a horizontal que a velocidade da bala deve fazer para atingir o macaco? E quanto tempo demorará até que sua bala atinja-o?

Problema 4: (Moyses 1) O Alcance de um projétil é 4 vezes maior que sua altura máxima e o mesmo permaneceu no ar por 2 segundos

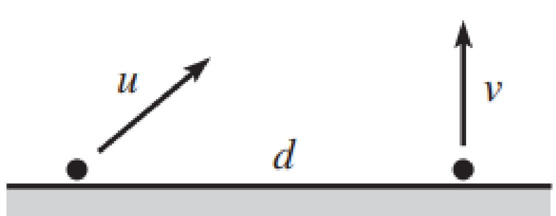
a) Em que angulo ele foi lançado?

b) Qual foi sua velocidade inicial?

c) Qual seu alcance?

Considere a aceleração da gravidade $g = 9{,}8 m/s^2$

Problema 5: (Morin) Duas bolas, separadas por uma distancia d, são jogadas ao ar no instante t=0, como mostra a figura abaixo. uma delas é jogada com v



a) Qual deve ser a velocidade u com o qual a segunda bolinha deve ser jogada para que acerte a primeira no momento em que esta está na sua altura máxima?;

b) Qual deve ser o angulo que u faz com a horizontal?

Considere que a aceleração gravitacional no sistema é g

Problema 6: (Moyses 1) Mostre que o alcance horizontal de duas partículas com a mesma velocidade é o mesmo quando ambas tem seus ângulos de lançamento representados por: $(\frac{\pi}{4} - \delta)$ e $(\frac{\pi}{4} + \delta)$

Problema 7: (ITA-11) Duas partículas idênticas, de mesma massa m, são projetadas de uma origem O comum, num plano vertical, com velocidades iniciais de mesmo módulo e ângulos de lançamento respectivamente α e β em relação à horizontal. Considere T_1 e T_2 os respectivos tempos de alcance do ponto mais alto de cada trajetória e t_1 e t_2 os respectivos tempos para as partículas alcançar um ponto comum de ambas as trajetórias. Assinale a opção com o valor da expressão $t_1T_1 + t_2T_2$

a) $\frac{2v_0^2(\tan(\alpha)+\tan(\beta))}{g^2}$

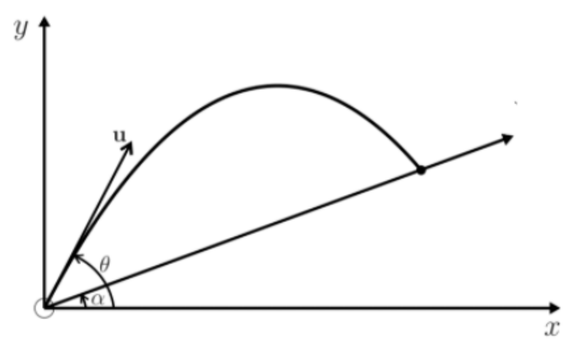
b) $\frac{2v_0^2}{g^2}$

c) $\frac{4v_0^2\sin(\alpha)}{g^2}$

d) $\frac{4v_0^2\sin(\beta)}{g^2}$

e) $\frac{2v_0^2(\sin(\alpha)+\sin(\beta))}{g^2}$

Problema 8: (De Lange) Uma partícula esta em um plano inclinado que faz um angulo com a horizontal α e está é lançada com uma velocidade u fazendo um angulo θ com a horizontal, como mostra a imagem abaixo



Mostre que a partícula atingira o plano a uma distancia R tal que:

$$R = \frac{2u^2}{g\cos^2(\alpha)}\cos(\theta)\sin(\theta - \alpha) \tag{16}$$

Problema 9: DESAFIO - (200 Physics Problems) Um grilo encontra em sua frente um tronco de raio R posto no chão e planeja pula-lo para chegar ao outro lado. Dado a aceleração da gravidade local g, qual a velocidade miníma que o grilo precisa ter para pular o tronco?

5. Dicas

Problema 1: Aplique as formulas apresentadas sobre lançamento balístico para calcular as quantias pedidas. Se não lembra das formulas, tente prova-las por conta própria.

Problema 2: É dado o valor de y em função do tempo, é importante saber usar os dados apresentados para adquirir as informações. Nesse caso foi dado o valor de H e de τ, ambas podem ser usadas para se adquirir as informações que foram pedidas

Problema 3: Ambas os corpos sofrem o mesmo efeito gravitacional de forma que há em ambos um $\Delta y = -gt^2/2$. Assim, esse termo não interfere em como o macaco vê a bala indo em sua direção.

Problema 4: O angulo de lançamento é algo puramente geométrico do sistema que não depende nem da gravidade nem do tempo de queda, use as formulas de A e H e você tera uma equação que depende unicamente de θ.

Problema 5: Ambas as partículas devem estar no mesmo x e no mesmo y quando ocorre a colisão. Por ser o ponto de máxima altura, é sabido tanto o valor de y quando o valor de t ao qual a colisão ocorre, dados suficientes para calcular o que foi pedido. Descrever o sistema por u_x e u_y e a partir dai chegar em u e θ pode ser bem mais simples do que achar as duas quantias diretamente

Problema 6: Use o fato que $\sin(\theta) = \cos(\pi/2 - \theta)$ e escreva θ de uma outra maneira que lhe seja útil na questão

Problema 7: Não há muito segredo que eu posso falar aqui, só posso garantir que tem conta pra caramba e muuuuito manejamento matemático(essa deveria ser uma questão difícil independente do seu conhecimento físico como um todo)

Problema 8: Há diversas maneiras de resolver essa questão, uma das mais rápidas é estabelecer que quando a partícula toca o plano $\frac{y}{x} = \tan(\theta)$, usando substituições adequadas é possível resolver. Outra maneira é descrever o sistema por meio de coordenadas paralelas e perpendiculares e não haverá um lançamento balístico mas sim um movimento com tanto uma aceleração horizontal quando uma vertical, mas não é difícil achar o tempo de queda nessas coordenadas, e então achar R é um caminho direto.

Problema 9: Essa é uma questão que envolve uma certa “carta"de perceber que quando estamos no caso de velocidade miníma, a partícula deve tangenciar o tronco em dois pontos simétricos no mesmo y. Estabeleça que a partícula vai tangenciar o tronco em um ponto do tronco que faz um angulo θ com a vertical com uma velocidade v_0. O alcance horizontal precisa ser igual a

$A = 2R\sin(\theta)$ (por que?) e com isso descubra o valor de v_0 em função de θ. Então use Torricelli para descobrir a velocidade de lançamento em função de θ. Você devera ter uma função para V que só depende desse angulo, então é possível plotar num gráfico essa função pra descobrir valor mínimo que a velocidade pode ter.(Uma solução completa dessa questão sera postada futuramente, mas tente se divertir com ela sem olhar a resposta).

6. Gabarito

Problema 1: a) $v = 40m/s$

b) $t = 3s$

c) $h = 45m$

d) $A = 240m$

Problema 2: a) $v = 24m/s$

b) $g = 12m/s^2$

Problema 3: Ele deve mirar no macaco e o tempo até a bala atingir é $t = \frac{\sqrt{d^2+h^2}}{v_0}$

Problema 4: a) 45º

b) 13,9 m/s

c) 19,6m

Problema 5: a) $u^2 = (gd/v)^2 + v^2$,

b) $\tan(\theta) = v^2/gd$

Problema 6: provae po

Problema 7: Alternativa b

Problema 8: provae po

Problema 9: $v_{min}^2 = 2gR(1 + \sqrt{2})$