# Impulso e Momento Linear

Gabriel Silva - Projeto Olímpicos

## 1. Introdução

Qual das seguintes situações, é mais provável de ser parado: um carro com uma velocidade de 20km/s ou uma bola com a mesma velocidade? O senso comum nos diz que é a bola, mas por quê? Ora, isso está diretamente relacionado com o conceito de momento linear. Além disso, para os amantes de 8 ball pool, veremos a respeito das colisões entre bolinhas de bilhar.

## 2. Momento Linear

Momento linear é definido matematicamente como o produto entre a massa e a velocidade de um corpo qualquer.

$$\boxed{\vec{p} \equiv m \cdot \vec{v}} \tag{I}$$

Em questão da análise dimensional, é dado por:

$$[p] = M \cdot \frac{L}{T} = kg \cdot \frac{m}{s}$$

Então, assim como qualquer corpo em movimento, tem associado a si, energia cinética, o mesmo acontece para o momento linear, todo corpo que possui massa e velocidade, traz consigo, essa grandeza vetorial.

Veja na figura 1, que o momento linear tem sempre a mesma direção e sentido da velocidade $v$ sendo, sempre tangente a trajetória descrita pela partícula.

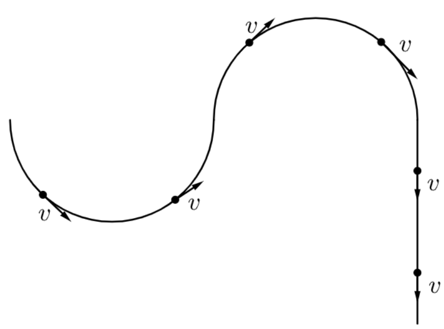


Figura 1: Momento linear em uma trajetória

# 3. O Teorema do Impulso

Considere um bloco submetido a uma força constante $F$ no instante $t_0 = 0$ que adquire uma velocidade $v_0$. Depois de um certo tempo $t$, este bloco irá adquirir uma velocidade $v$, se quiséssemos descrever o movimento deste bloco, qual equação iríamos utilizar? a função horária da velocidade. Então, veja:

$$v = v_0 + at$$

Multiplicando ambos os lados pela massa ($m$), temos:

$$m \cdot v = m \cdot v_0 + m \cdot a \cdot \Delta t$$

Se formos tratar de seus vetores, temos:

$$m \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{v}_0 + \vec{F} \cdot \Delta t$$

Como vimos, $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$:

$$\boxed{\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{I}} \tag{II}$$

Você deve ter percebido uma semelhança entre trabalho e energia e colisões e impulso, veja na tabela 1 as diferenças por meio de uma tabela:

| Trabalho e Energia | Momento Linear e Impulso |
|---|---|
| $E_{\text{cin}} = \dfrac{mv^2}{2}$ | $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ |
| $W = F \cdot d$ | $\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$ |
| $E_{\text{cin}_f} = E_{\text{cin}_i} + W$ | $\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{I}$ |

Tabela 1: Comparação entre Trabalho e Energia e Momento Linear e Impulso

Se voltarmos na equação 2 e isolarmos o impulso, encontraremos algo interessante, veja:

$$\vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}} \tag{III}$$

A esta equação acima que encontramos, denominamos como: Teorema do Impulso.
Mas perceba que se expandirmos e fatorarmos essa mesma equação, teremos que:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \vec{v} - m \cdot \vec{v}_0$$

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot (\vec{v} - \vec{v}_0)$$

$$\vec{F} = \frac{m \cdot \Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}} \tag{IV}$$

Ora, ora, ora... o que encontramos aqui? a lendária segunda lei de Newton. Então perceba que a segunda lei é um caso particular para momento e impulso, pois:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

Caso a massa não fosse constante, teríamos:

$$F = \frac{d(m \cdot v)}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$F = ma + v\frac{dm}{dt}$$

Caso a massa fosse constante, o termo $\frac{dm}{dt}$ seria zero, portanto acharíamos a segunda lei de Newton.

Então se o impulso é igual a variação do momento linear, é claro que sua unidade de medida é correspondente.

$$[F] = M \cdot \frac{L}{T^2} = N$$

$$[I] = N \cdot T = M \cdot \frac{L}{T} = kg \cdot \frac{m}{s}$$

Pensando um pouco sobre o significado físico do teorema de impulso, podemos entender que, se um corpo qualquer tem associado consigo momento linear $p_0$ e é submetido a uma força $F$ constante, então o momento linear final $p$ desse corpo, irá depender da intensidade dessa força e o intervalo de tempo, isto é, do impulso.

**Propriedade 01**: O impulso pode ser dado numericamente pela área sob o gráfico $F$ x $t$ durante um intervalo de tempo.

## *3.1 Sistema*

- Forças internas: dizemos que uma força é interna quando temos a aplicação da terceira lei de newton (ação-reação), isto é, tanto o corpo que aplicou a força, quanto o que recebe a força, fazem parte do sistema.

- Força externa: é dita uma força externa, quando um corpo que está fora do sistema, aplica uma força em outro corpo que está dentro do sistema.

Então, em um sistema, o somatório de todos os momentos lineares corresponde ao momento linear final

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \dot{\vec{r}}$$ [1]

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{P}}$$

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{p_\alpha}} \tag{V}$$

Se $\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P}$ é constante

[1] O vetor $\dot{\vec{r}}$ simboliza a derivada temporal da posição, isto é, $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

# 4. Princípio da Conservação do Momento Linear

Considere a seguinte situação hipotética ilustrada na figura 2, nela temos dois blocos com respectivamente massas iguais a $m_A$ e $m_B$, com suas velocidades iguais a $v_A$ e $v_B$. Por conta da massa e da velocidade, cada bloco possui um momento linear, isto é, $\vec{p_A}$ e $\vec{p_B}$. Portanto, podemos escrever que:

$$\vec{P_i} = \vec{p_A} + \vec{p_B}$$

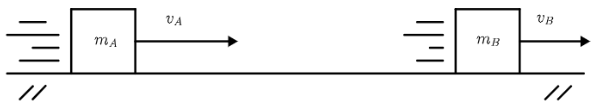


Figura 2: Antes da Colisão

Na figura 4, podemos observar a situação da figura anterior durante a colisão entre os blocos. Perceba que o bloco $A$ aplicou uma força de intensidade $F$ no bloco $B$, que por sua vez, pela terceira lei de Newton, aplicou uma força de mesma intensidade no bloco $B$, na mesma direção, com sentido trocado. Mas que força é essa? se multiplicarmos isso pelo tempo durante a colisão, vamos obter o impulso $I$ - vale lembrar que esse tempo é igual tanto para o bloco $A$, quanto para o bloco $B$, pois se a força é a mesma, não tem como esse tempo for maior para um dos blocos. Mas lembrando, o impulso é a variação do momento linear, portanto, durante essa colisão, teremos a variação do momento desse sistema.

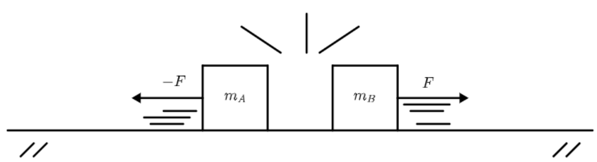


Figura 3: Durante a Colisão

Volte na figura 3 e veja para qual direção e sentido aponta o vetor velocidade de ambos os blocos, pois lembrando, o momento linear atua na mesma direção e sentido da velocidade. Portanto, veja na figura 4 novamente, a direção e o sentido dos vetores velocidade dos blocos.

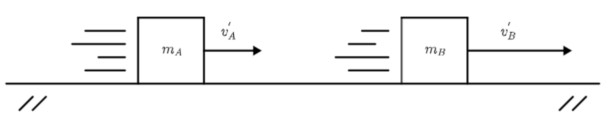


Figura 4: Após a Colisão

Se formos somar o momento linear antes e durante a colisão, de modo a obter o momento linear do sistema, teremos:

$$\vec{P_A} = \vec{p}_{1_A} + \vec{I}$$

$$\vec{P_B} = \vec{p}_{1_B} + (-\vec{I})$$

Se formos observar o somatório dos momentos do sistema antes da colisão e depois do sistema, haverá alguma mudança? Vamos verificar:

$$\vec{P}_{antes} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$$

$$\vec{P}_{depois} = \vec{p}_A + I + \vec{p}_B - I$$

$$\vec{P}_{depois} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$$

$$\vec{P}_{antes} = \vec{P}_{depois} \tag{VI}$$

Ora bolas, então o momento linear antes é igual o momento linear depois da colisão, portanto o momento linear se conserva. Mas por que isso acontece? Devido a terceira lei de Newton, que durante a colisão entre dois blocos, haverá a troca entre os corpos de impulsos iguais e contrários, isto é, o que um corpo ganhará de momento linear, o outro irá perder.

**Propriedade 02**: Em um sistema isolado de forças externas o momento linear total do sistema se conserva, isto é:

$$\text{Se } \vec{F}_{ext} = 0, \text{ então } \vec{P} \text{ é constante.}$$

# 5. Colisões

## *5.1 constante de restituição*

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \geq \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \tag{VII}$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \tag{VIII}$$

Veja, na equação 7 temos a conservação de energia cinética e na equação 8, temos a conservação de momento linear. Agora, basta fatorar e dividir uma equação pela outra

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) \geq m_2(v_2'^2 - v_2^2) \tag{IX}$$

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \tag{X}$$

Dividindo a equação 9 pela equação 10, temos:

$$v_1 + v_1' \geq v_2' + v_2$$

Seja $e$ a constante de restituição, definida por:

$$\boxed{e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}} \tag{XI}$$

Dependendo do valor de $e$, a classificação da colisão irá mudar, isto é:

1. $e = 1$ - Colisões elásticas (ou perfeitamente elásticas);
2. $e = 0$ - Colisões inelásticas; e
3. $0 < e < 1$ - Colisões parcialmente elásticas.

## 5.2 Colisão Inelástica em uma Dimensão

Por definição, uma colisão inelástica é dita como aquela que a energia cinética não se conserva.

### 5.2.1 Colisão Perfeitamente Inelástica

Uma colisão é considerada perfeitamente inelástica, quando os corpos permanecem unidos após a colisão. Veja na figura 7 dois corpos um de massa $m_1$ e velocidade $\vec{v}_{1_i}$ e o outro corpo tem massa $m_2$ e velocidade $\vec{v}_{2_i}$. Após um intervalo de tempo, haverá uma colisão, em que o corpo 1 irá se unir com o corpo 2 e, portanto, irão se mover ao longo do eixo $x$ com velocidade $\vec{V}$.


Figura 5: Exemplo de uma colisão perfeitamente inelástica antes do contato


Figura 6: Exemplo de uma colisão perfeitamente inelástica depois do contato

Então perceba, se $\vec{F}_{ext} = 0$, então temos a conservação de momento, portanto:

$$m_1\vec{v}_{1_i} + m_2\vec{v}_{2_i} = (m_1 + m_2)\vec{V}$$
$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_{1_i} + m_2\vec{v}_{2_i}}{(m_1 + m_2)} \tag{XII}$$

É claro que se a velocidade inicial do corpo 2 for zero, então a velocidade final será dada por:

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_{1_i}}{m_1 + m_2} \tag{XIII}$$

Analisando um caso particular, o que teríamos, se:
$(i)$ Se $m_1 \ll m_2$
Podemos dividir tudo por $m_2$ para manter a igualdade, então temos:

$$\vec{V} = \frac{\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_{1_i}}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

Então perceba, que ao dividir $\frac{m_1}{m_2}$, temos um adimensional, portanto, podemos comparar com o número 1 que também é um adimensional. Veja que, se $m_1 \ll m_2$, então $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$, então podemos desprezar ele, no entanto, não podemos fazer o mesmo com o numerador, se não vai dar ruim (☺).

$$\vec{V} = \frac{m_1}{m_2}\vec{v}_{1_i}$$

### 5.2.2 *Colisão Parcialmente Inelástica*

A diferença para a colisão perfeitamente inelástica para a parcialmente inelástica, é que nesta, após a colisão os corpos não ficam unidos, isto é, suponha que tenhamos a situação idêntica a da figura 5, mas após a colisão, teremos a seguinte situação ilustrada pela figura 7.


Figura 7: Exemplo de uma colisão parcialmente inelástica depois do contato

Se $\vec{F}_{ext} = 0$, então temos a conservação de momento, portanto:

$$m_1\vec{v}_{1_i} + m_2\vec{v}_{2_i} = m_1\vec{v}_{2_i} + m_2\vec{v}_{2_f}$$

## 5.3 *Colisão Elástica em uma Dimensão*

Um corpo de massa $m_1$ com velocidade $\vec{v}_{1_i}$ se aproxima de outro corpo estacionário de massa $m_2$ (ver Fig. 8). As massas ricocheteiam elasticamente. quais são as velocidades finais das partículas?


Figura 8: Exemplo de uma colisão elástica antes do contato

Após o contato, teremos uma configuração igual a da figura 7.
Escrevendo a conservação de energia cinética total e a conservação de momento linear, temos:

$$m_1\vec{v}_{1_i} + 0 = m_1\vec{v}_{1_f} + m_2\vec{v}_{2_f} \tag{XIV}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{1_i}^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v_{1_f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2_f}^2 \tag{XV}$$

A partir de agora, vou escrever as velocidades em função de seus módulos.

$$\begin{cases} m_1(v_{1_i} - v_{1_f}) = m_2v_{2_f} \\ m_1(v_{1_i}^2 - v_{1_f}^2) = m_2v_{2_f}^2 \end{cases}$$

Dividindo uma equação pela outra, obtemos:

$$\frac{m_1(v_{1_i} + v_{1_f})(v_{1_i} - v_{1_f})}{m_1(v_{1_i} - v_{1_f})} = \frac{m_2v_{2_f}^2}{m_2v_{2_f}}$$

$$v_{1_i} + v_{1_f} = v_{2_f} \tag{XVI}$$

Substituindo a equação 16 na equação 14, temos:

$$m_1 v_{1_i} = m_1 v_{1_f} + m_2(v_{1_i} + v_{1_f})$$

$$(m_1 - m_2)v_{1_i} = (m_1 + m_2)v_{1_f}$$

$$v_{1_f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1_i}}{(m_1 + m_2)} \tag{XVII}$$

Ora bolas, se agora descobrimos a $v_{1_f}$, podemos substituí-la na equação 9 e obter:

$$v_{1_i} + \frac{(m_1 - m_2)v_{1_i}}{(m_1 + m_2)} = v_{2_f}$$

$$\frac{(m_1 - m_2)v_{1_i}}{(m_1 + m_2)} + \frac{(m_1 + m_2)v_{1_i}}{(m_1 + m_2)} = v_{2_f}$$

$$\frac{2m_1 v_{1_i}}{m_1 + m_2} \tag{XVIII}$$

## 5.4 *Colisão em Duas Dimensões*

Uma bola de bilhar com velocidade $v$ aproxima-se de um idêntico estacionário (Ver Fig. 9). As bolas quicam umas nas outras elasticamente, de tal forma que a que está entrando é desviada por um ângulo $\theta$ (ver Fig. 10). Como podemos escrever as equações?

Se $F_{ext} = 0$, então $\vec{P}$ é constante. Como se trata de uma colisão elástica, então temos conservação de energia cinética também.


Figura 9: Exemplo de uma colisão bidimensional antes do contato

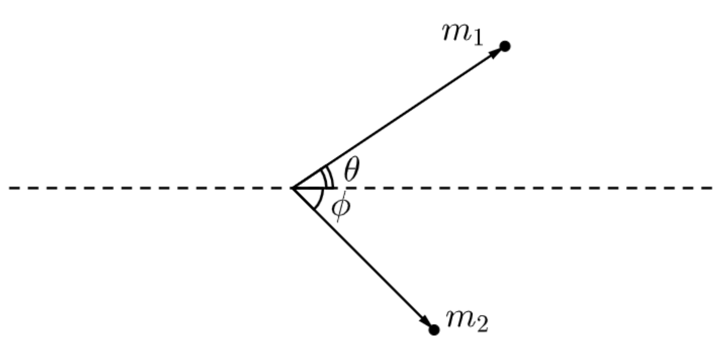


Figura 10: Exemplo de uma colisão bidimensional após o contato

Então, podemos escrever a conservação do momento em função dos parâmetros $x$ e $y$.

Para a componente $x$:

$$mv_{1_i} = m_1 v_{1_f} cos\phi + m_2 v_{2_f} cos\theta$$

Para a componente $y$:

$$0 = m_1 v_{1_f} sin\phi + m_2 v_{2_f} sin\theta$$