Movimento Uniformemente Variado (MUV)

Bruno Makoto - Projeto Olímpicos

1. Introdução

Um dos movimentos mais elementares que são estudados pela física é o MUV, movimento uniformemente variado, que explica a trajetória de uma maçã caindo (possivelmente na cabeça de algúem) ou a de um carro acelerando na estrada. Por constituir uma das bases da cinemática, seu profundo conhecimento é de extrema importância para provas de olimpíada.

Um MUV descreve o curso das coisas que **aceleram**, e aí entra a pergunta: o que é a aceleração? Intuitivamente, sabemos que a velocidade de um corpo é a taxa da variação de sua posição com relação ao tempo, ou seja, se um corpo se move com velocidade **constante** de $5m/s$, a cada segundo que passa, ele anda $5m$. Agora, o que acontece se a velocidade muda? É exatamente isso que a aceleração descreve: a taxa de mudança temporal da velocidade de um corpo. Analogamente, se temos um corpo com uma aceleração constante de $5m/s^2$, a cada segundo que passa, sua velocidade muda $5m/s$.

Assim, a aceleração linear (a) é definida por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Além disso, podemos reescrever tal expressão para obter a dependência temporal da velocidade (v) em função da velocidade inicial (v_0) para um instante de tempo inicial nulo (convenção):

$$v = v_0 + at$$

Agora, como ficaria o gráfico da velocidade em função do tempo em um MUV? Repare na expressão acima: se o eixo y representa a velocidade e o eixo x o tempo, o que temos é uma reta com coeficiente angular igual a aceleração, que faz sentido já que o coeficiente angular mede a variação da grandeza em y para variações em x, e com um coeficiente linear igual a velocidade inicial, que também faz sentido já v_0 é simplesmente a velocidade do corpo no instante inicial. Graficamente:

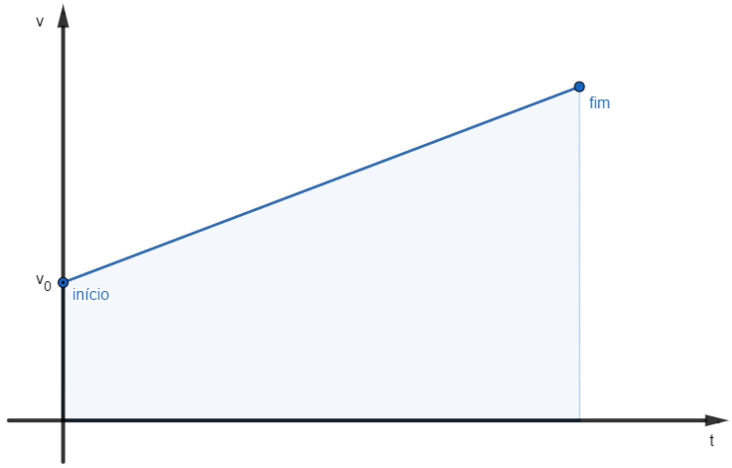


Figura 1: Gráfico de v versus t

2. Função Horária da Posição

Até agora tratamos somente de variações da velocidade na presença de uma aceleração constante, que são puramente advindas das definições impostas. Dando um passo além, nos também podemos descrever como a **posição** do corpo acelerado depende do tempo, ou seja, queremos encontrar $S(t)$.

A primeira coisa que deve ser notada é que o gráfico de v *versus* t encobre uma área que é igual ao **deslocamento** do corpo. Isso pode ser observado de duas maneiras. Uma delas é recorrer ao cálculo, lembrando que a integral de v com relação ao tempo é a própria área do gráfico:

$$v = \frac{dS}{dt} \Rightarrow \int dS = \Delta S = \int_{t_i}^{t_f} v dt$$

A outra, que diz essencialmente a mesma coisa, fica mais clara com uma imagem:

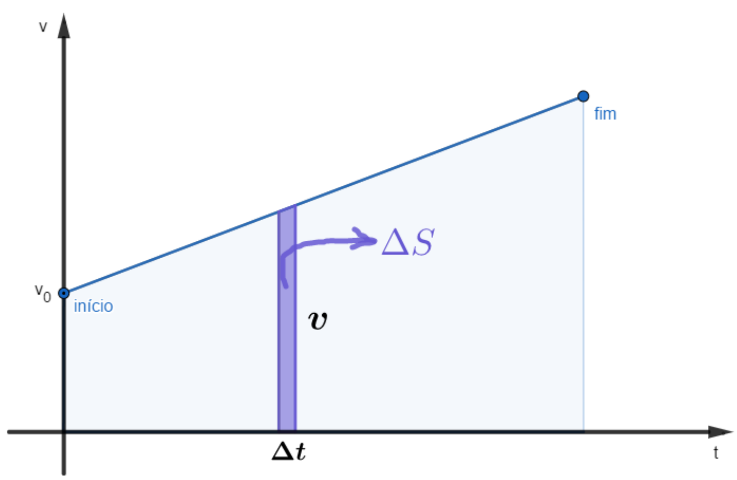


Figura 2: Gráfico de v versus t

Perceba que, para pequenos intervalos de tempo, temos que $v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \Delta S_i = v(t)\Delta t$. Assim, o deslocamento da partícula em pequenos intervalos de tempo Δt, S_i, é a área varrida durante esses pequenos instante. Portanto, para achar o deslocamento **total**, basta somarmos todos os pequenos deslocamentos, chegando assim (novamente) que o deslocamento da partícula é a área do gráfico.

Agora, podemos juntar tudo que já vimos para finalmente chegarmos na expressão desejada. Lembrando da fórmula para a área de um trapézio, temos que o deslocamento (ΔS) é dado por:

$$\Delta S = \frac{(v+v_0)(t-t_0)}{2} \Rightarrow S = S_0 + \frac{(v+v_0)t}{2}$$

Onde assumi, por convenção, que o instante de tempo inicial é nulo.

Como a velocidade é dada por $v = v_0 + at$ para uma aceleração constante, podemos juntar as duas expressões para obter o resultado desejado:

$$S = S_0 + \frac{(2v_0 + at)t}{2} = S_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$$

c.q.d.

Novamente, vale observarmos o gráfico da curva. Para obter uma melhor experiência, abra esse link do Desmos e varie os valores de S_0, v_0 e a. Note que quando o eixo y representa a posição e o eixo x representa o tempo, o gráfico obtido é uma parábola! Isso se observa pois há uma dependência quadrática da posição no tempo, que é característico de parábolas.

3. Velocidade em função da posição

Já vimos como encontrar a velocidade em função do tempo,$v(t)$, e a posição em função de tempo, $S(t)$, para movimentos com uma aceleração constante. Dessa forma, nós podemos encontrar uma função parametrizada que relaciona v e S **sem** envolver o tempo. Tal expressão é chamada de equação de Torricelli, e vamos deduzi-la agora:

A ideia geral é 'matar' o tempo que aparece em cada expressão individualmente, então basta isolarmos ele em uma das equações e substituirmos na outra. Assim, com a função horária da velocidade ($v(t)$):

$$v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

Substituindo na função horária da posição ($S(t)$):

$$S - S_0 = v_0 t + \frac{a}{2}t^2 = v_0(\frac{v-v_0}{a}) + \frac{a}{2}(\frac{v-v_0}{a})^2 = \frac{vv_0}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2}{2a} - \frac{vv_0}{2a} + \frac{v_0^2}{2a}$$

Rearranjando e sendo $\Delta S = S - S_0$:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$$

c.q.d.

Além disso, vale notar que podemos rearranjar a equação de Torricelli multiplicando todos os membros pela massa e os dividindo por um fator de 2 para obter::

$$ma\Delta S = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Isso provavelmente te lembra alguma coisa! É o teorema da energia cinética: o trabalho realizado pela resultante de forças R ($R = ma$ pela segunda lei de Newton) é a variação da energia cinética do corpo. Perceba que, assim como a maioria das coincidências na física, isso não é coincidência. Existe uma relação matemática entre as forças, trabalhos, energias, etc, que justifica tal relação.

4. Deduções com Cálculo

Para aqueles que estiverem se aprofundando do estudo da física, um bom compreendimento do cálculo por trás das coisas é essencial. Por isso, irei revisitar todas as expressões já vistas e deduzidas com um olhar mais refinado.

4.1 Definições

- $a = \frac{dv}{dt}$
- $v = \frac{dS}{dt}$
- $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ [regra do tombo]
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ [regra do tombo 'reversa']
- $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ [regra da cadeia]

4.2 Função Horária da Velocidade

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int dv = \int adt \Rightarrow v = at + C$$

Onde estamos assumindo que a aceleração é constante e o instante de tempo inicial é nulo.

Perceba que podemos também encontrar a constante de integração C através das condições iniciais. Como $v(0) = a \cdot (0) + C = C = v_0$, temos a expressão original:

$$v = v_0 + at$$

4.3 Função Horária da Posição

$$v = \frac{dS}{dt} \Rightarrow \int dS = \int vdt = \int (v_0 + at)dt = \int v_0 dt + \int atdt = v_0 t + \frac{a}{2}t^2 + C$$

Podemos encontrar a constante de integração C pela condição inicial $S(0) = v_0 \cdot (0) + \frac{a}{2} \cdot (0)^2 + C = S_0 =$, logo:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$$

4.4 Torricelli

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = v\frac{dv}{dS} \Rightarrow \int adS = \int vdv \Rightarrow aS = \frac{v^2}{2} + C$$

Como, no instante inicial, $v(0) = v_0$ e $S(0) = S_0$, temos que $C = aS_0 - \frac{v_0^2}{2}$, assim:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(S - S_0)$$

5. Juntando Tudo

Equações do MU e MUV:

MU	MUV
$a = 0$	$a = cte$
$v = cte$	$v = v_0 + at$
$s = s_0 + vt$	$s = s_0 + vt + \frac{at^2}{2}$
$-$	$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$

Alguns termos relevantes:

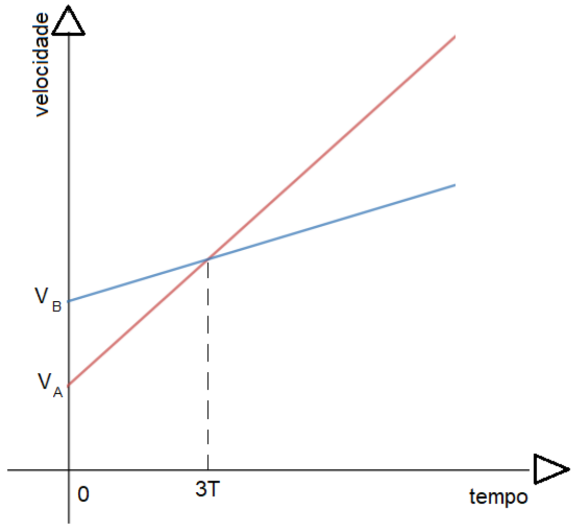
-	$v > 0$	$v < 0$
$a = 0$	Progressivo e Uniforme	Retrógrado e Uniforme
$a > 0$	Progressivo e Acelerado	Retrógrado e Acelerado
$a < 0$	Progressivo e Retardado	Retrógrado e Retardado

Na prática, é isso que você terá que usar para a maioria dos problemas. A chave para resolvê-los é recorrer às diversas fórmulas e métodos (por exemplo, desenhar gráficos que representam o movimento) disponíveis e utilizá-los com sabedoria.

6. Problemas

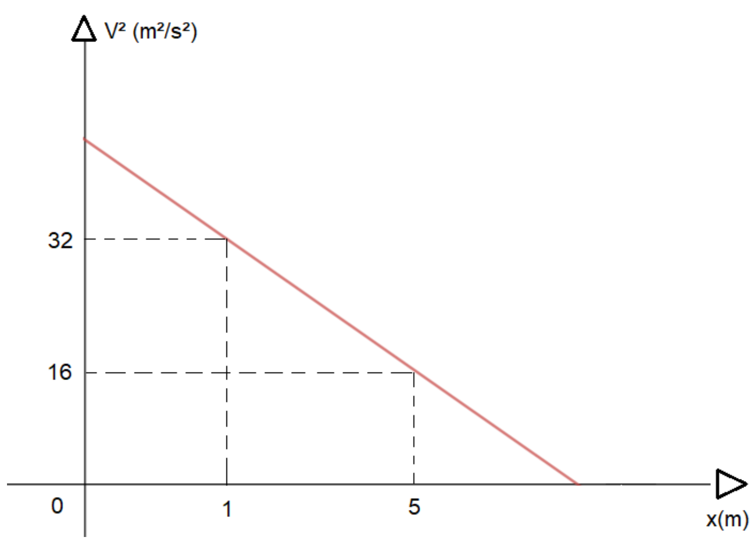
Problema 1. Sabemos que a velocidade média de um corpo durante um intervalo de tempo Δt é $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, onde ΔS é o deslocamento da partícula durante esse intervalo. Mostre que, somente para acelerações constantes, podemos dizer que $v_m = \frac{v_i + v_f}{2}$, onde v_i e v_f são, respectivamente, a velocidade inicial e final do corpo

Problema 2. (Renato Brito) No instante inicial ($t = 0$), dos móveis A e B passam por um mesmo ponto movendo-se sobre uma mesma trajetória retilínea, de acordo com o gráfico abaixo. Determine o instante em que os móveis voltam a se encontrar



Problema 3. (Renato Brito) Um móvel A partiu do repouso, em MRUV, acelerado com $a = 8m/s^2$. Um segundo depois, parte do mesmo ponto outro móvel B, em MRU, com velocidade v. Qual o menor valor de v de forma que B ainda consiga alcançar A?

Problema 4. (Renato Brito) Um móvel que se desloca ao longo do eixo x inicia um processo de frenagem ao passar pela posição $x = 0$ no instante $t = 0s$, movendo-se de acordo com o gráfico abaixo. Determine a) a aceleração do móvel em $t = 2s$; b) a distância que ele percorre durante todo o processo de frenagem; c) o instante t em que o móvel para.



Problema 5. (Renato Brito) Dois carros iniciam uma corrida numa estrada retilínea, partindo de uma mesma posição, com velocidades iniciais iguais a v_1 e v_2 e acelerações escalares constantes

respectivamente iguais a a_1 e a_2. Sabendo que eles atingem a linha de chegada simultaneamente, determine o comprimento dessa pista de corrida

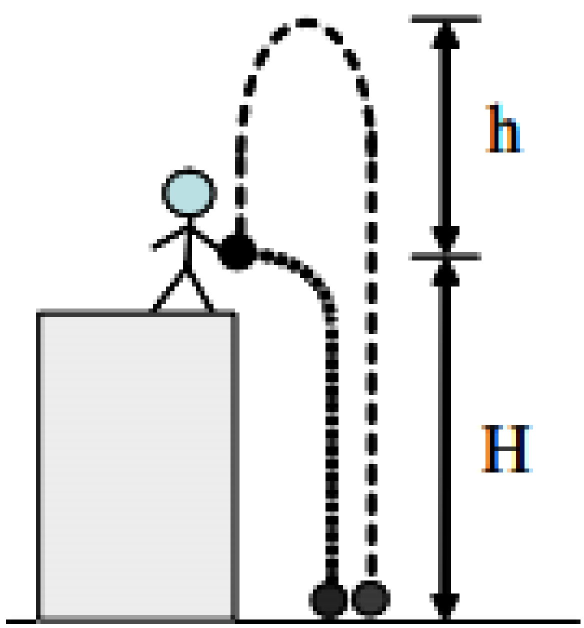
Problema 6. (Renato Brito) Um percurso de comprimento d é dividido em n partes iguais. Ao final de cada parte, a aceleração do móvel sofre um aumento de $\frac{a}{n}$, onde a é a sua aceleração inicial ao partir do repouso do início desse percurso. Assim, após percorrer todo esse percurso, qual a velocidade atingida pelo móvel?

Problema 7. Durante seu estudo da queda de corpos, Galileu concluiu que se ele medisse a altura de um corpo sob ação da gravidade em instantes de tempo igualmente espaçados, as posições dos corpos seguiriam a seguinte proporção:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{4} = \frac{x_3}{9} = \frac{x_4}{16} = ...$$

Prove isso.

Problema 8. (ITA-2006) À borda de um precipício de um certo planeta, no qual se pode desprezar a resistência do ar, um astronauta mede o tempo t_1 que uma pedra leva para atingir o solo, após deixada cair de uma de altura H. A seguir, ele mede o tempo t_2 que uma pedra também leva para atingir o solo, após ser lançada para cima até uma altura h, como mostra a figura. Ache uma expressão para H em função dos parâmetros dados



7. Gabarito e Dica

Problema 1. Demostração

Problema 2. $6T$ (Dica: lembre-se de que a área do gráfico corresponde ao deslocamento)

Problema 3. $16m/s$

Problema 4. a) $-2m/s^2$ b) $9m$ c) $3s$

Problema 5. $\dfrac{2(v_1 - v_2)(v_1 a_2 - v_2 a_1)}{(a_2 - a_1)^2}$ (Dica: faça um gráfico de v versus t)

Problema 6. $\sqrt{da(3 - \dfrac{1}{n})}$ (Dica: procure fazer uma soma telescópica e lembre-se da soma dos termos de uma PA)

Problema 7. Demonstração

Problema 8. $H = \dfrac{4t_1^2 t_2^2 h}{(t_2^2 - t_1^2)^2}$ (Dica: não resolva a equação de segundo grau)