Polias e Sistemas Mecânicos

Gabriel Silva - Projeto Olímpicos

1. Introdução

Polias é um assunto cobrado com uma certa frequência em olimpíadas e vestibulares, por isso, cá estou eu, caro leitor, para lhe apresentar este tema. Nesta parte, irei lhe apresentar um exemplo de polia fixa como motivação para você adquirir este conhecimento em seu arsenal de ideias.

Determine as acelerações dos blocos e as trações nos fios em função das massas a e b, sendo que a superfície é plana e sem atrito e m_a e m_b.

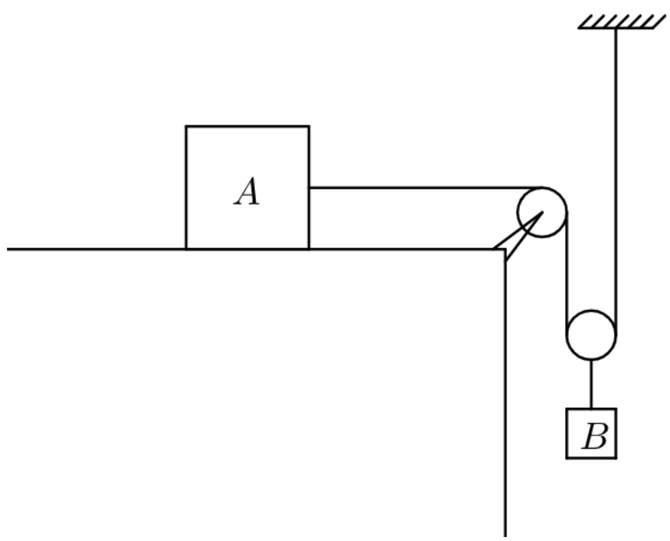


Figura 1: Situação Problema

Analisando todo o sistema, temos que o bloco A possui a sua força peso na vertical para baixo e a força normal N na mesma direção com sentido trocado. O bloco A está atado por uma corda ideal, por isto, temos uma força de tração T na horizontal da esquerda para a direita. O bloco B também têm suas componentes verticais, sendo o peso P_B e a tração $2T$, $2T$ devido às duas trações que aparecem no fio acima. Colocado todas as forças, basta resolver certo? Vamos ver. Fazendo o somatório das forças no eixo x e y, temos que:

1. $T = m_A a_A$

2. $P_B - 2T = m_B a_B$

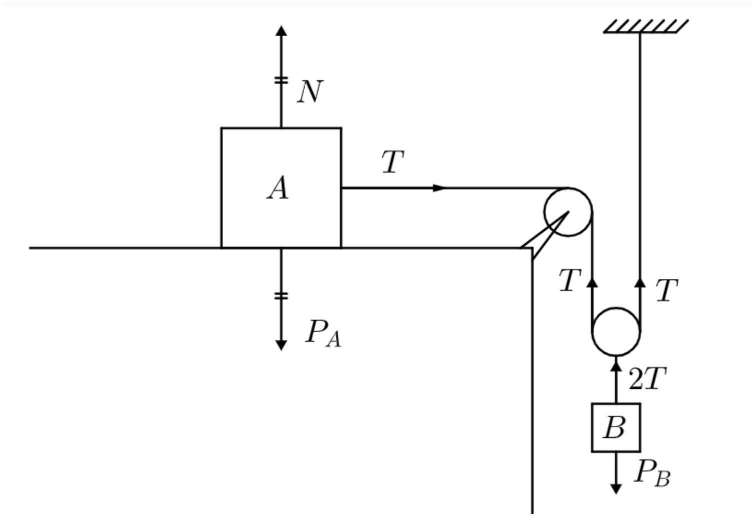


Figura 2: Forças que atuam no sistema

Você deve ter percebido que fiz algo diferente dos problemas mais clássicos que envolvem dinâmica, em que tu diz que a aceleração é igual a a, no entanto, neste caso, temos duas acelerações. Pensa o seguinte: observe a figura 3 e veja que o comprimento total do fio é igual a L, então aquele pedaço de fio horizontal é igual a L_{A_1}, na vertical temos um comprimento de fio $2L_{B_1}$, além disso, a soma entre os comprimentos x e y é igual a z, não era necessário colocar, mas no final verá que é irrelevante.

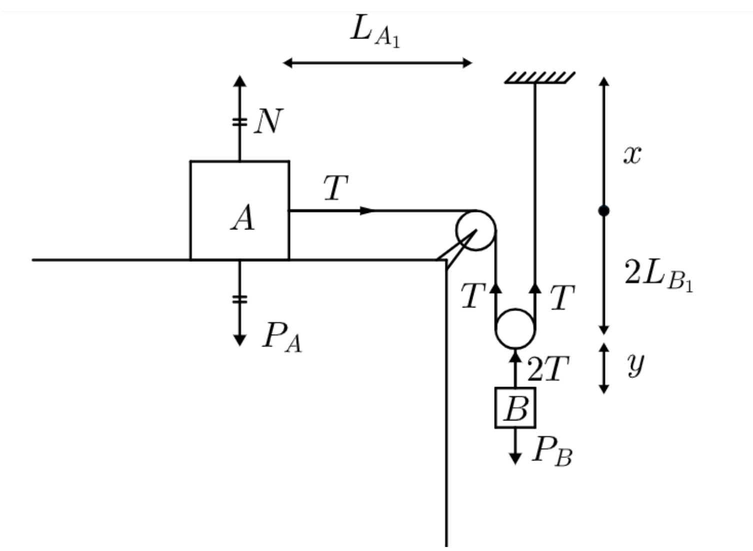


Figura 3: Comprimento dos fios

Agora imagina que você deixou esse sistema andar, depois de um intervalo de tempo o bloco estará, por exemplo, na situação que colocada na figura 4.

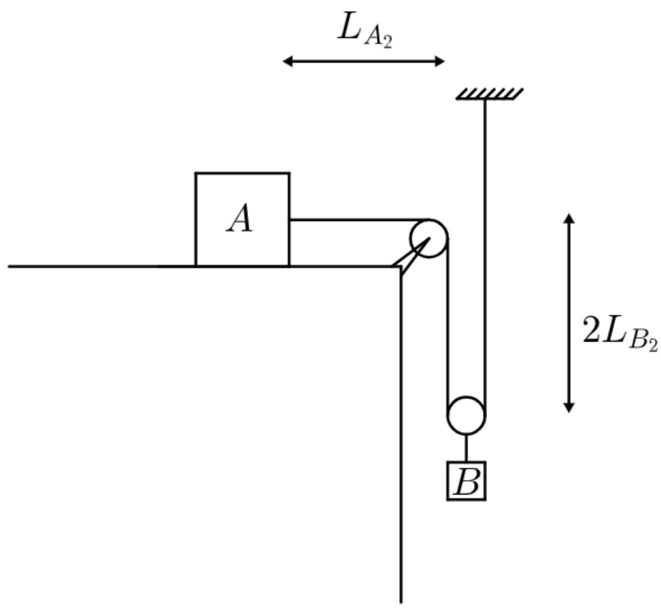


Figura 4: Após um intervalo de tempo

Perceba que apenas modifiquei o nome do tamanho dos fios, mas o seu comprimento total continua o mesmo. Isto é, podemos escrever em termos matemáticos:

$$L_{A_1} + 2L_{B_1} + z = L$$

$$L_{A_2} + 2L_{B_2} + z = L$$

$$L_{A_1} + 2L_{B_1} + z = L_{A_2} + 2L_{B_2} + z$$

Então note que o comprimento z é realmente irrelevante, tanto que podemos subtrair z de ambos os lados e simplificar um pouco mais a equação:

$$L_{A_1} + 2L_{B_1} = L_{A_2} + 2L_{B_2}$$

Podemos subtrair $2L_{B_1}$ e L_{A_2} de ambos os lados e ficamos com:

$$L_{A_1} - L_{A_2} = 2L_{B_2} - 2L_{B_1}$$

O que é esse resultado que encontramos? Perceba que a parcela $L_{A_1} - L_{A_2}$ corresponde ao deslocamento do bloco A, o mesmo se aplica para $2L_{B_2} - 2L_{B_1}$, sendo o deslocamento do bloco B. Então, temos que $\Delta L_A = 2\Delta L_B$. Se formos tratar esse resultado a partir das derivadas, podemos fazer uma segunda derivada temporal e obteremos que:

$$\boxed{a_A = 2a_B} \tag{I}$$

Feito toda essa análise, provamos que a aceleração do corpo A difere do corpo B, a partir disso poderíamos retornar ao problema e finaliza-lo, contudo, esse não é o objetivo.

2. Polia Móvel

Agora considere a seguinte situação ilustrada na figura 5. Determine as acelerações a_A e a_B em função dos parâmetros m_A, m_B, m_C e g.

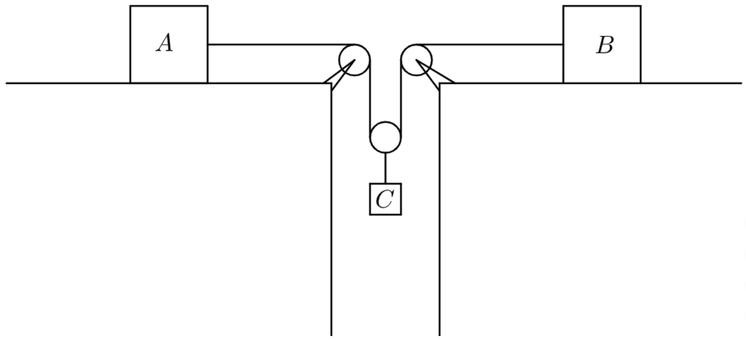


Figura 5: Sistema com polia móvel

A ideia aqui seria realizar os mesmos procedimentos do exemplo anterior, em que, primeiro, colocaríamos as forças que atuam nos blocos e no fio. Como eu sou gente boa, já coloquei tudo na figura 6, observe:

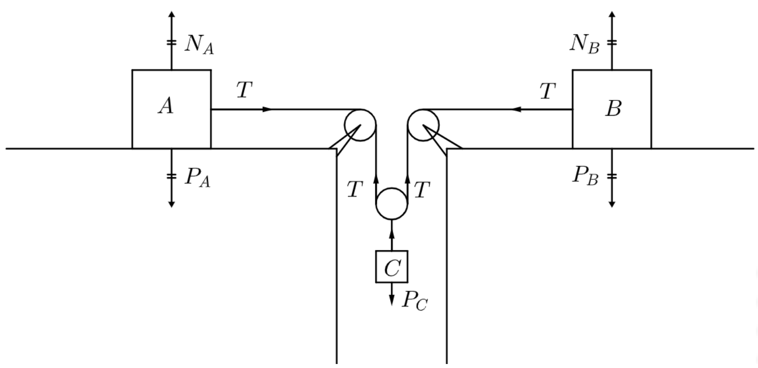


Figura 6: Forças que atuam no sistema

Agora basta aplicar as leis de Newton novamente.

1. $T = m_A a_A$
2. $T = m_B a_B$
3. $P_C - 2T = m_C a_C$

Eis que então nos deparamos com um problema, temos três equações e quatro incógnitas, portanto não tem como resolver. A solução para esse problema é utilizar a mesma ideia apresentada anteriormente. Então veja que na figura 7 coloquei as medidas correspondentes aos fios, lembrando que o comprimento total é constante.

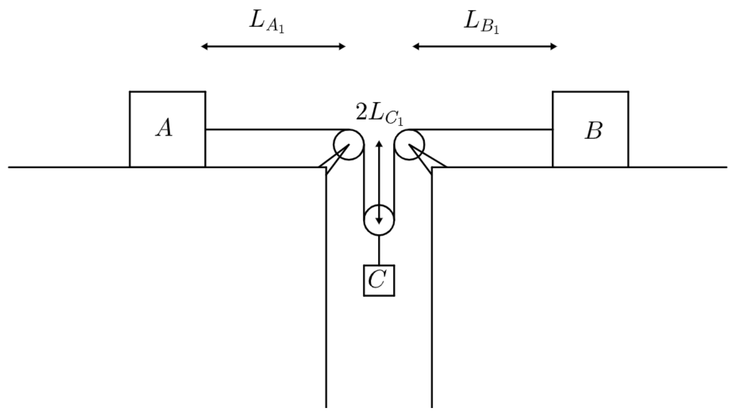


Figura 7: Comprimento dos fios

Imagine que o sistema começou o andar por um determinado tempo, de modo que ele fique igual à configuração da figura 8. Perceba que o tamanho dos fios mudou, no entanto, a soma de todos esses pedaços é constante.

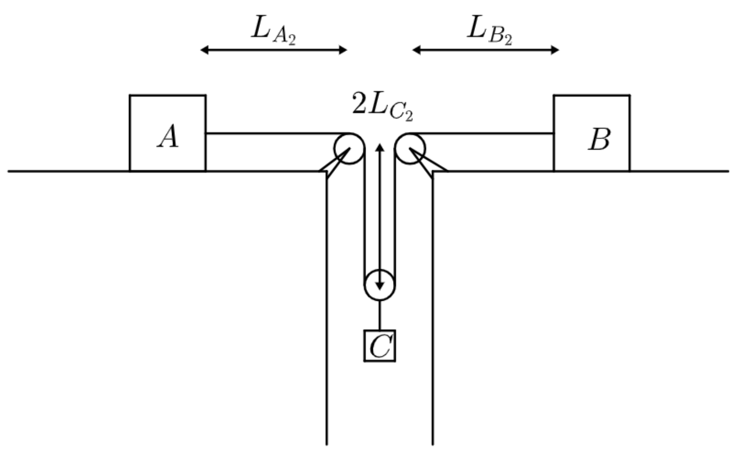


Figura 8: Após um intervalo de tempo

Portanto:

$$L_{A_1} + L_{B_1} + 2L_{C_1} = L$$

$$L_{A_2} + L_{B_2} + 2L_{C_2} = L$$

$$L_{A_1} + L_{B_1} + 2L_{C_1} = L_{A_2} + L_{B_2} + 2L_{C_2}$$

Subtraindo L_{A_2}, L_{B_2} e $2L_{C_1}$, obtemos:

$$L_{A_1} - L_{A_2} + L_{B_1} - L_{A_2} = 2L_{C_2} - 2L_{C_1}$$

E o que encontramos? Exatamente o deslocamento dos blocos nesse determinado tempo que se passou. Portanto, podemos escrever:

$$\Delta L_A + \Delta L_B = 2\Delta L_C$$

Agora, se fizermos uma segunda derivada temporal, obteremos as acelerações dos blocos. Veja:

$$\boxed{a_A + a_B = 2a_C} \tag{II}$$

Com isso, temos agora quatro equações e quatro incógnitas, agora conseguimos resolver. A ideia será achar os valores da aceleração em função das trações e substituir na última equação.

1. $a_A = \dfrac{T}{m_A}$
2. $a_B = \dfrac{T}{m_B}$
3. $a_C = \dfrac{m_C g - 2T}{m_C}$

Pronto, agora basta substituir e fazer continha de padaria.

$$\frac{T}{m_A} + \frac{T}{m_B} = 2\left(\frac{m_C g - 2T}{m_C}\right)$$
$$\frac{Tm_B + Tm_A}{m_A m_B} = \left(\frac{2m_C g - 4T}{m_C}\right)$$
$$Tm_B m_C + Tm_A m_C = 2m_A m_B m_C g - 4Tm_A m_B$$
$$T(m_B m_C + m_A m_C - 4m_A m_B) = 2m_A m_B m_C g$$

$$\boxed{T = \frac{2m_A m_B m_C g}{m_B m_C + m_A m_C - 4m_A m_B}} \tag{III}$$

Ufa, conseguimos encontrar a tração, agora só voltarmos nas equações e encontrar as acelerações. Vem comigo:

$$\boxed{a_A = \frac{2m_B m_C g}{m_B m_C + m_A m_C - 4m_A m_B}} \tag{IV}$$

$$\boxed{a_B = \frac{2m_A m_C g}{m_B m_C + m_A m_C - 4m_A m_B}} \tag{V}$$

3. Variante com duas Polias Móveis

Na figura 9, temos uma situação com dois blocos A e B de massas respectivamente, igual a m_A e m_B. Os blocos estão sendo puxados por uma força de intensidade igual a F, numa plataforma sem atrito. Sua missão é encontrar as acelerações a_A e a_B e a tração T no fio.

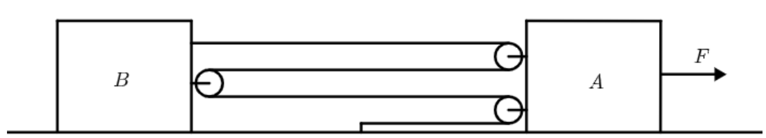


Figura 9: Duas polias móveis

A ideia seria fazer igual aos casos anteriores, mas nomear os fios parece uma tarefa meio difícil. A pergunta a ser feita é: qual fio depende de A? e qual depende de B? Pensa o seguinte, se o bloco A for fixo e o bloco B se movimentar, quais fios irão se mover? Ora, apenas os três primeiros contando de cima para baixo. Agora imagine a situação contrária, o bloco B está fixo e o bloco A móvel, se movermos ele para a direita, o que iria acontecer? todos os fios tenderiam a esticar e o primeiro iria arrebentar. Portanto, temos que:

$$L = 3L_B$$

$$L = 4L_A$$

$$3L_B = 4L_A$$

Agora basta aplicar a ideia apresentada nos casos anteriores, imagine que o sistema irá se mover, daí os pedaços do fio irão assumir valores diferentes e no final chegaremos que:

$$3\Delta S_B = 4\Delta S_A$$

Fazendo a segunda derivada temporal, temos que:

$$\boxed{3a_B = 4a_A} \tag{VI}$$

Agora basta aplicar as leis de Newton que é sucesso.

1. $F - 4T = m_A a_A$
2. $3T = m_B a_B$
3. $3a_B = 4a_A$

E agora? Bom, agora é só conta de padaria né.

$$F - 4\left(\frac{m_B a_B}{3}\right) = m_A \frac{3}{4} a_B$$

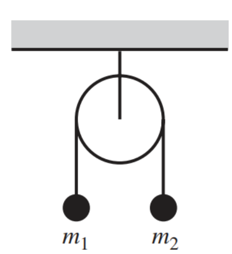
$$F - \frac{4m_B a_B}{3} = \frac{3m_A a_B}{4}$$

$$12F - 16m_B a_B = 9m_A a_B$$

$$\boxed{a_B = \frac{12F}{9m_A + 16m_B}} \tag{VII}$$

4. Problemas

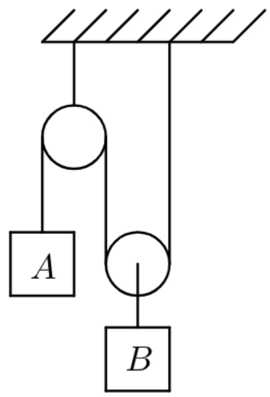
Problema 1. (David Morin) Considere o sistema a seguir (Máquina de Atwood), encontre a aceleração a das massas e a tração T da corda. Considere o fio inextensível e a massa da polia desprezível.



Problema 2. (Renato Brito) No sistema representado na figura, os fios e as polias são ideais. A aceleração da gravidade tem módulo 10 $\frac{m}{s^2}$ e as massas de A e B são respectivamente iguais a 3,0 kg e 8,0 kg. Calcule:

a) as acelerações de A e B.

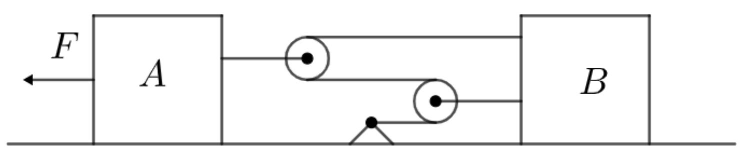
b) a tração no fio ligado ao bloco A.



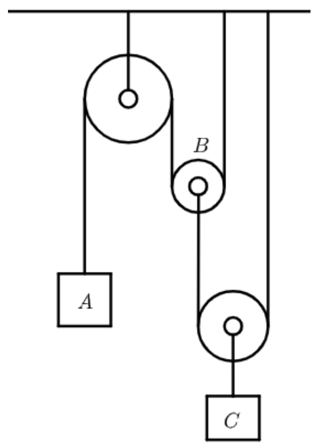
Problema 3. (Renato Brito) A figura mostra dois blocos A e B de massas $m_A = 2\text{kg}$ e $m_B = 6\text{kg}$ puxados por uma força de intensidade $F = 14\text{N}$ sobre um solo liso. Determine:

a) a aceleração de cada bloco.

b) a tração no cabo.



Problema 4. Encontre as relações entre as acelerações utilizando vínculo geométrico.



Problema 5. (OBC - 2018) No arranjo da figura o plano inclinado está fixo numa mesma horizontal. Os blocos A e B possuem massas, respectivamente, 4,0kg e 6,9kg. Despreze o atrito entre A e o plano inclinado. O fio é inextensível e passa sem atrito pela polia de massa desprezível. Sendo $\sin 30° = 0{,}5$ e $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, pode-se afirmar que a força resultante que o fio exerce na polia tem intensidade:

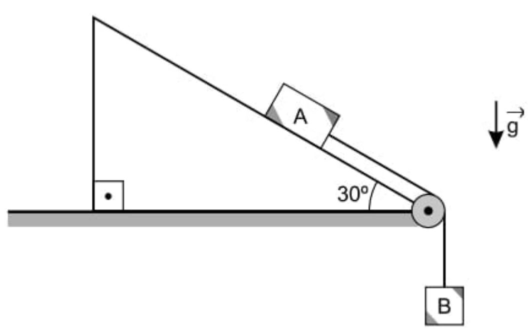
a) 12N

b) $12\sqrt{3}$N

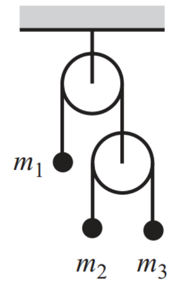
c) 24N

d) $24\sqrt{3}$N

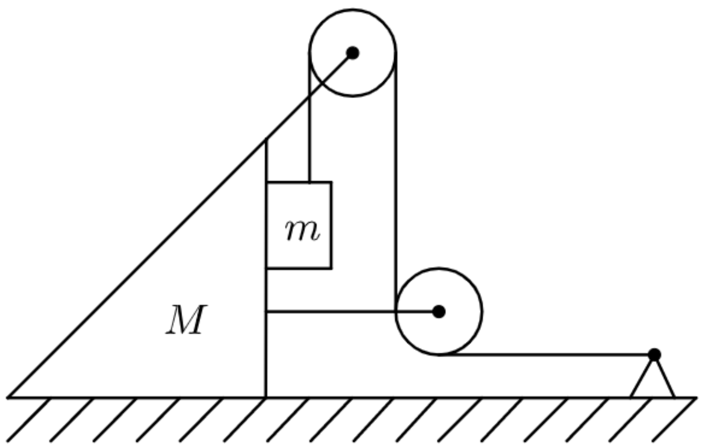
e) 48N



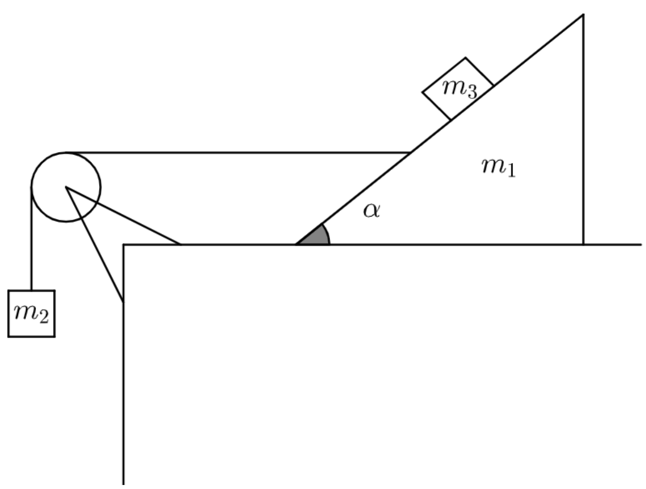
Problema 6. (David Morin) Uma máquina de Atwood dupla é mostrada na figura abaixo, com massas m_1, m_2, e m_3. Encontre as acelerações das massas.



Problema 7. (Renato Brito) Na figura, todas as polias e fios são ideais, bem como todos os atritos são desprezíveis. Abandonando-se o sistema do repouso, pede-se determinar a aceleração da cunha de massa M em relação à Terra. A massa do bloco vale m e a gravidade local vale g.



Problema 8. (IME) A figura mostra três blocos, que podem se mover sem atrito. Sendo $\alpha = 30°$. determine a relação entre m_1, m_2 e m_3 para que os blocos se movam, sem que m_3 escorregue em relação a m_1.



5. Gabarito

Problema 1. $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_2 + m_1}$ e $T = \dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$

Problema 2. $a_B = 2\frac{m}{s^2}$; $a_A = 1\frac{m}{s^2}$; e $T = 36N$

Problema 3. $a_A = 3\frac{m}{s^2}$; $a_B = 2\frac{m}{s^2}$; e $T = 4N$

Problema 4. $a_C = \dfrac{a_A}{4}$

Problema 5. letra A

Problema 6.

$$a_1 = g\frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3};$$
$$a_2 = -g\frac{4m_2m_3 + m_1m_2 - 3m_1m_3}{4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3};$$
$$a_3 = -g\frac{4m_2m_3 + m_1m_3 - 3m_1m_2}{4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3}$$

Problema 7. $a = \dfrac{mg}{M + 2m}$

Problema 8. $\dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{m_2} = \sqrt{3}$