

Teoria da Relatividade Restrita

Gabriela Martins dos Santos - [Projeto Olímpicos](#)

A Teoria da Relatividade (TR), que começou a ser publicada no ano de 1905 por Albert Einstein, revolucionou a física, formando com a futura mecânica quântica a base da física moderna e contemporânea que vem sendo desenvolvida atualmente. Além disso, as ideias trazidas pela relatividade foram absorvidas por diversas áreas, resultando em influências na linguística e nas artes visuais, por exemplo. Por fim, é inegável a presença de conceitos que remetam a TR em obras de ficção. Por outro lado, seus conceitos são famosos por serem contraintuitivos, levando a diversos paradoxos aparentes e confusões conceituais. Não são poucos os artigos científicos que tratam justamente dessa temática.

De certo modo, a TR pode ser dividida em dois ramos: a (a) Teoria da Relatividade Restrita (TRR), que, como o próprio nome indica, se restringe a situações em que não há aceleração, e a (b) Teoria da Relatividade Geral (TRG), que resolve a limitação anterior. Do ponto de vista matemático, a TRR é extremamente simples, o que não é nenhum pouco verdadeiro para a TRG. Dessa forma, opta-se por abordar somente a TRR neste material, juntamente com alguns aspectos históricos. No futuro, os tópicos de TRG tratados em olimpíadas poderão ser abordados, mesmo que de maneira superficial e sem tanto rigor matemático, em outro material.

Por fim, vale a pena conferir a aula sobre [Redshift e Lei de Hubble](#) do Otávio, onde a TRR é apresentada brevemente. Além disso, são pré-requisitos cinemática e dinâmica clássicas, conteúdos geralmente estudados no 1º ano de ensino médio.

Agora, sem mais delongas, vamos ao que interessa!

1. Conceitos iniciais

De forma breve, apresentamos a seguir conceitos recorrentes na TR. Acredita-se que o leitor já tenha certa intuição sobre eles, mas, como veremos em breve, intuição não é algo muito bem-vindo na física moderna...

1.1 Evento

Um evento é um acontecimento qualquer, como uma lâmpada acendendo, uma supernova explodindo ou duas partículas colidindo. Para registrar tais eventos, utilizamos as coordenadas espaçotemporais para que possamos identificar determinado evento e diferenciar dois eventos diferentes. Imagine receber um ingresso para o show da sua banda favorita em São Paulo, mas sem saber a data e horário. Complicado, né?

As coordenadas medidas em um determinado referencial inercial são, na maioria dos casos, diferentes das medidas em outro referencial inercial. Isso acontece porque um evento não ocorre em um referencial em particular ou em determinadas coordenadas, nós que atribuímos coordenadas espaçotemporais a ele.



1.2 Referencial Inercial

Um referencial inercial é aquele que obedece a lei da Inércia, ou seja, continua em movimento com velocidade constante ou em repouso (aka velocidade constante nula), sem que nenhuma força aja sobre ele. Dessa forma, o vetor velocidade não sofre alterações. Vale ressaltar que dois observadores com velocidade relativa constante nula entre si constituem um mesmo referencial inercial.

2. Um pouco de história

A ideia de “relatividade” em si não era nova: Segundo Galileu, “Os movimentos relativos dos corpos contidos em um dado espaço são os mesmos, esteja aquele espaço em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.” Isso quer dizer que as leis da mecânica, que descrevem o movimento, não dependem do observador. Posteriormente, com a Mecânica Newtoniana, define-se que os espaços em movimento uniforme ou em repouso são os chamados de referenciais inerciais.

O tempo e espaço na Mecânica Clássica eram tidos como se era observado no cotidiano, ou seja, não passavam de forma diferente para cada observador. Além disso, esses dois conceitos possuíam outras características em comum, como infinidade e continuidade, porém não interferiam um no outro e eram independentes entre si.

A adição de velocidades de Galileu previa que a luz de uma lanterna em movimento era mais rápida que a luz de uma lanterna em repouso, em relação a um mesmo referencial, pois a velocidade da luz na primeira situação seria a soma entre a velocidade da lanterna e a velocidade da luz em si. A situação representada na figura 1 mostra a adição de velocidades de Galileu. Denota-se por v a velocidade do trem em relação a Terra, u' a velocidade da corredora segundo um observador em repouso em relação ao chão do trem e u a velocidade da mesma corredora em relação a Terra. Com isso, tem-se que $u = u' + v$, já que u e v possuem mesmo sentido.

Em 1865, James Clerk Maxwell publicou suas equações. Seu trabalho foi muito importante para a óptica e para o eletromagnetismo, pois reunindo trabalhos de outros cientistas, descreveu a luz como onda eletromagnética. Utilizando essas equações, encontrou que a luz, assim como as outras ondas eletromagnéticas, se propaga com uma velocidade constante, equivalente a $c = 299.792.458m/s$ no vácuo.

Isso causou grande problema, pois contrastava com o que a mecânica clássica previa, de que a velocidade da luz dependeria do referencial adotado assim como havia uma relatividade em relação à velocidade da corredora. Como tanto a mecânica clássica quanto o eletromagnetismo eram bem fundamentadas, os cientistas propuseram um referencial para o qual a velocidade das ondas eletromagnéticas é a constante prevista por Maxwell: o éter.

É perceptível aqui o quanto a ideia de ondas mecânicas era forte, dificultando a compreensão das ondas eletromagnéticas. Em paralelo com as ondas mecânicas, o éter seria o meio de propagação da luz e também o referencial a ser adotado para que essa velocidade seja c . Ele não ofereceria nenhuma resistência ao movimento dos planetas (pois seu movimento já era bem descrito pela gravitação de Newton) e também não interferiria nas reações químicas, por exemplo. Visando comprovar sua existência, diversos cientistas realizaram um experimento chamado de interferômetro. O de maior precisão foi realizado por uma dupla de americanos, Albert Michelson e Edward Morley, em 1887.

Nesse experimento, a luz é emitida por uma fonte e é dividida por um espelho semi-transparente. A distância entre os espelhos é igual, porém, devido ao que foi chamado de “vento de éter” (efeito da velocidade orbital da Terra), a velocidade da luz seria modificada e a distância percorrida pelos



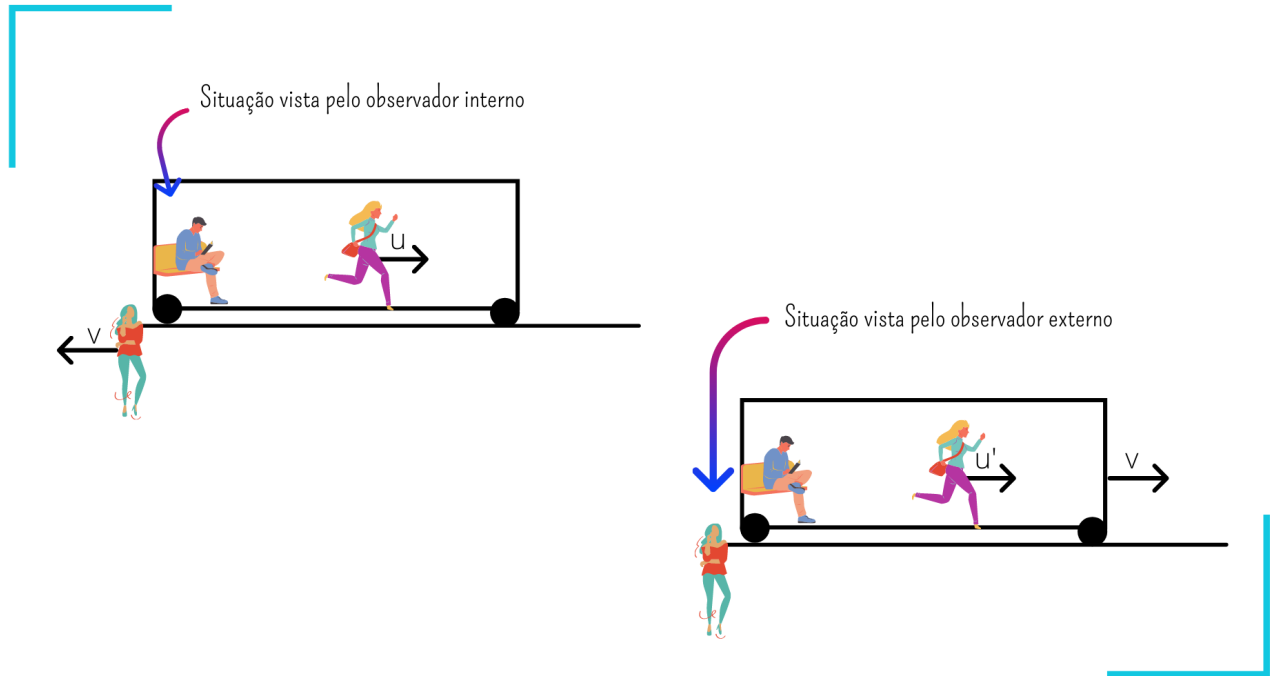


Figura 1: Adição de velocidade de Galileu. As situações estão exemplificadas através de trens, algo muito comum na TRR pois eram os meios de transporte mais rápidos da época em que a teoria foi publicada.

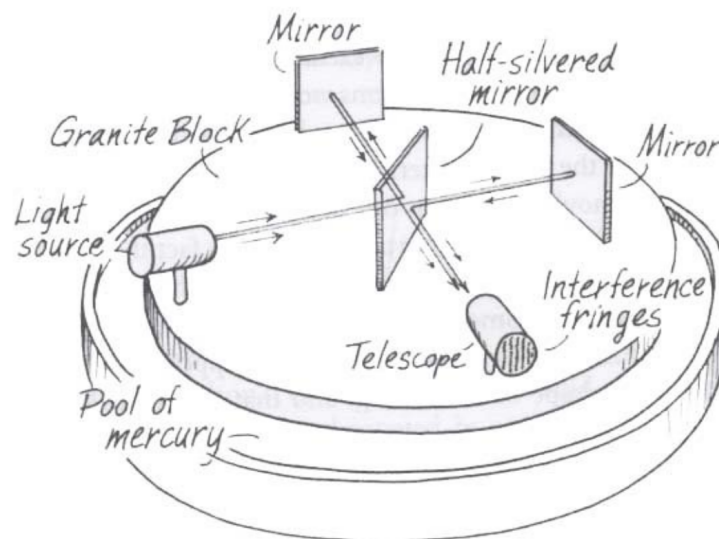


Figura 2: Desenho do interferômetro utilizado. Ironicamente, foi através de um interferômetro que a TRG foi comprovada.



dois feixes seria diferente, produzindo franjas de interferência. O interferômetro ficava em um bloco de granito que flutuava em uma piscina de mercúrio, possibilitando que o aparato fosse girado em diferentes configurações.

O resultado do experimento contrariou a hipótese inicial dos cientistas: o éter não foi detectado. Veja bem, isso não significa que o éter foi comprovado inexistente, de forma que alguns poucos cientistas continuaram tentando detectá-lo até mesmo após a publicação da TRR, mudando o tamanho do interferômetro, temperatura, diferenciando o tamanho dos braços, com outros comprimentos de onda, entre outros.

3. Os Postulados

Os dois postulados em que a teoria se baseia foram publicados em 1905, *annus mirabilis* de Einstein¹, em um artigo intitulado “Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento”². Postulados são como pontos de partida em teorias, onde as consequências desses postulados são testadas e, possivelmente, comprovam os postulados, como aconteceu com a TRR. Segundo Euclides, postulados seriam levemente diferentes de axiomas, entretanto os dois possuem como definição geral ser uma verdade aceita sem necessidade prévia de comprovação.

“As leis da física são as mesmas para todos os observadores situados em referenciais inerciais. Não existe um referencial absoluto.” O primeiro postulado, chamado de Postulado da Relatividade, amplia a ideia galileana de que não só as leis da mecânica são as mesmas para todos os referenciais inerciais, mas as leis da física como um todo.

“A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todas as direções e em todos os referenciais inerciais.” O segundo postulado se baseia nas equações de Maxwell, que trazem não só a luz mas todas as ondas eletromagnéticas com uma velocidade constante, $c = 299.792.458m/s$ quando propagadas no vácuo.

4. Simultaneidade

Na mecânica clássica, com o conceito de tempo absoluto, ou seja, o mesmo para todos os observadores, dois eventos simultâneos em um referencial inercial também seriam simultâneos em outro referencial inercial. Oras, por que razão o tempo passaria de forma diferente? Com a TRR, isso não continua sendo verdade.

Como consequência dos postulados, temos que espaço e tempo não são mais absolutos. Por exemplo, para o observador A, que se move em direção à lâmpada dianteira, a luz dessa lâmpada vai chegar primeiro aos seus olhos (supondo que ele tenha a precisão necessária para tal observação). Isso acontece pois o trem e, conseqüentemente, o observador estão se movendo em direção a fonte, logo a luz dessa lâmpada percorrerá uma distância menor do que a lâmpada traseira até ser

¹Ele publicou quatro artigos no *Annalen der Physik* nesse ano, dos quais TODOS abalaram a comunidade científica.

²Ou *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, como preferir.



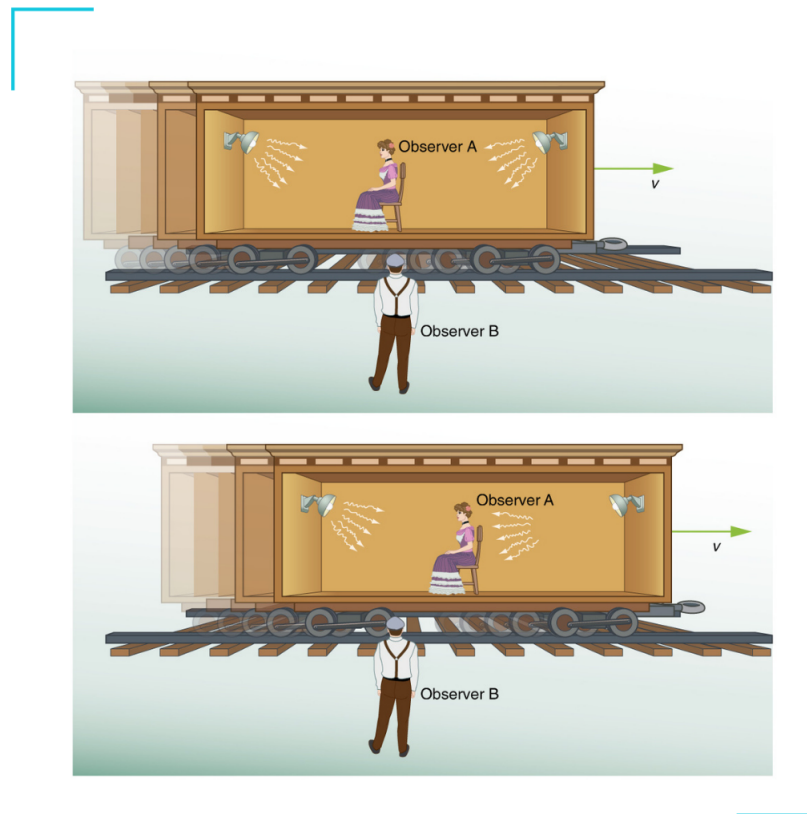


Figura 3: Trajetória da luz emitida por duas lâmpadas, uma em cada extremidade de um vagão de trem em movimento com velocidade v constante, sendo observada por dois referenciais inerciais diferentes, externo (Observer B) e interno (Observer A). Por definição, as lâmpadas são ligadas quando o meio do vagão passa em frente ao observador externo.

detectada. Perceba que o vagão é completamente fechado, o que impede o observador de dentro do vagão saber se ele está em movimento ou em repouso em relação a um referencial externo. Para o observador de fora do vagão, em repouso em relação ao chão, a luz vai ser detectada simultaneamente já que a distância entre o observador externo e a fonte dianteira é igual a distância entre o observador externo e a fonte traseira. Por isso, ele vai detectar a luz proveniente das duas fontes ao mesmo tempo.

Os dois referenciais não concordam quanto à simultaneidade dos dois eventos, então qual está correto? Perceba que os dois referenciais são igualmente válidos se utilizarmos o postulado da relatividade, isto é, não existe um referencial privilegiado. Logo, as duas respostas estão certas em relação aos seus respectivos referenciais. Por isso é tão importante estabelecer qual o referencial adotado quando falamos de movimento, não só no caso da relatividade.

Por fim, note que a diferença entre a detecção da luz de cada lâmpada apenas se torna evidente em velocidades comparáveis a c . Além disso, perceba que, se a luz tivesse velocidade infinita, quaisquer dois eventos simultâneos em um referencial inercial seriam simultâneos em todos os referenciais inerciais, já que a luz chegaria instantaneamente para todos.

Nas próximas seções exploraremos como a quebra da simultaneidade dá origem à divergências entre medidas de tempo e comprimento entre dois referenciais. Antes de prosseguir, reflita: como



se mede intervalos de tempo ou de comprimento?³

5. Dilatação do Tempo

Por diversão, iremos equacionar um *gedankenexperiment*⁴. Vamos imaginar um relógio de luz em um vagão de trem com largura suficiente, altura L e que se move com velocidade v constante em relação ao chão da Terra.

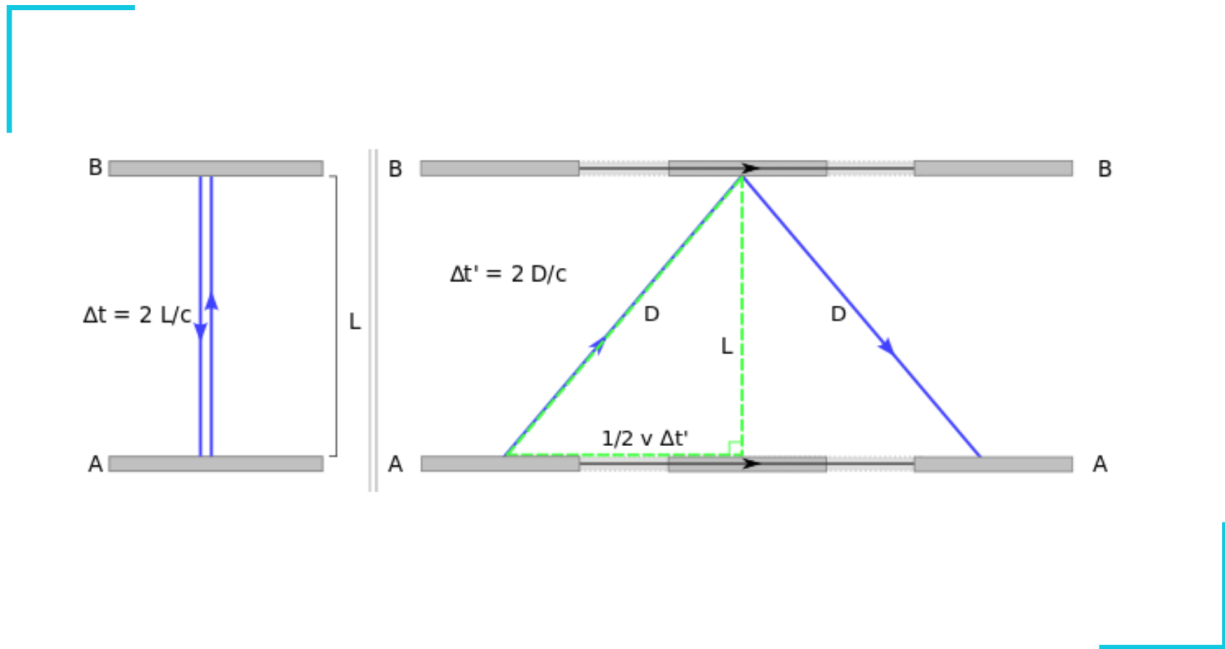


Figura 4: Relógio de luz dentro de um vagão de trem. O pulso de luz é emitido do chão do vagão e refletido por um espelho no teto do vagão para o chão novamente, onde é detectado.

Analisando a figura 4, temos que Δt é o tempo medido pelo referencial solidário ao trem⁵ que mede a trajetória da luz (ida e volta) como sendo $2L$. Já para o observador externo, o tempo decorrido entre a emissão e a detecção da luz é igual a $\Delta t'$.

O caminho percorrido pela luz forma um triângulo isósceles, já que a aceleração é nula, que pode ser dividido em dois triângulos retângulos. Os catetos desses triângulos são L , já que a altura do vagão não mudou, e $\frac{v\Delta t'}{2}$. As hipotenusas desses triângulos serão chamadas de D .

Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos que:

³Spoiler! Essas medidas são baseadas na diferença das coordenadas de dois eventos escolhidos. Como você já viu, dois eventos simultâneos em um referencial inercial não são necessariamente simultâneos em outro referencial inercial. Bazinga! É daí que surge a dilatação do tempo e a contração do comprimento que você já deve ter ouvido falar e que serão detalhados nas próximas duas seções.

⁴Do alemão, “experimento de pensamento”.

⁵Lembre-se que um referencial é caracterizado pelo plano cartesiano e não necessariamente um ser ou posição que vai “assistir” determinados eventos!



$$D^2 = L^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2$$

Substituindo $D = \frac{\Delta t'c}{2}$ e $L = \frac{\Delta tc}{2}$, obtemos que:

$$\left(\frac{\Delta t'c}{2}\right)^2 = \left(\frac{\Delta t'v}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta tc}{2}\right)^2$$

Reescrevendo a equação:

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois lados da equação:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Podemos substituir $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ por γ , também chamado de fator Lorentz.

$$\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t$$

O fator de Lorentz não é chamado de fator de Einstein, por exemplo, pois foi proposto por um cientista holandês chamado Hendrik Lorentz como uma forma de suportar a hipótese do éter ao defender que o tamanho dos braços do interferômetro se alteraria. Ele esteve a um passo de chegar na teoria da relatividade, mas interpretou mal a existência desse fator, que segundo ele não teria significado físico e seria apenas um resultado matemático.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Observando a última equação, vemos que $\gamma \geq 1$. Para velocidades baixas se comparadas à da luz, $\gamma \approx 1$ e por isso $\Delta t \approx \Delta t'$, sendo essa a razão de não percebermos diferenças entre intervalos de tempo no dia-a-dia. Portanto, o conceito de tempo absoluto presente na mecânica clássica era fruto das velocidades baixas dos movimentos observados no cotidiano. Hoje em dia os relógios dos satélites, (responsáveis pelo GPS, por exemplo) passam por correções devido às altas velocidades com que orbitam a Terra, além das correções referentes a TRG. Talvez no futuro, quando as viagens interestelares forem mais comuns, teremos que nos acostumar com esses conceitos caducos de tempo e espaço, né?

“Quando dois eventos ocorrem no mesmo lugar em um referencial inercial, o intervalo de tempo entre os eventos, medidos nesse referencial é chamado de intervalo de tempo próprio. Quando o intervalo de tempo entre os mesmos eventos é medido em outro referencial, o resultado é sempre maior que o intervalo de tempo próprio. O intervalo de tempo medido em outro referencial é chamado de tempo relativo.”⁶

⁶Fonte: “Fundamentos de Física: Volume 4, Óptica e Física Moderna”, de Halliday e Resnick (mais conhecido como “Livro de física para engenheiros”).



No exemplo acima, o intervalo de tempo próprio foi o medido pelo referencial solidário ao trem e o intervalo de tempo relativo foi o medido pelo referencial solidário a Terra, ou seja, uma pessoa externa ao trem marcaria um intervalo de tempo maior que uma pessoa no interior do trem, devido à velocidade relativa entre os dois referenciais. Isso significa que o tempo passou mais devagar para o referencial solidário ao trem.

Na demonstração acima, denotamos o tempo próprio por Δt e o tempo relativo por $\Delta t'$. Outra notação, mais usual e que adotaremos nessa aula, é chamar o tempo próprio de Δt_0 e o tempo relativo de Δt , portanto:

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$$

6. Contração do Comprimento

Analogamente à forma com que se mede o tempo, podemos medir o comprimento de um corpo medindo o intervalo de tempo entre a passagem de suas duas extremidades em um mesmo ponto se soubermos a velocidade com que ele se move, pois bastaria multiplicar o intervalo de tempo com a velocidade. Entretanto, como demonstrado na seção anterior, o tempo é relativo, ou seja, depende do referencial. Consequentemente, o comprimento também é relativo.

Utilizando o exemplo de um foguete com velocidade v qualquer, vamos medir seu comprimento no referencial solidário ao foguete e no referencial solidário a uma pessoa observando esse foguete da Terra, por exemplo.

Medindo do referencial solidário a Terra o intervalo de tempo decorrido entre a passagem dos dois extremos do foguete na frente do observador, obtemos o tempo relativo $\Delta t'$ e temos que o comprimento L' do foguete, se dá por:

$$L' = v \cdot \Delta t'$$

E que o comprimento L medido por um referencial solidário ao foguete, com tempo próprio Δt é dado por:

$$L = v \cdot \Delta t$$

Assim como o tempo, temos comprimento relativo e comprimento próprio. “O comprimento L_0 de um corpo medido no referencial em que o corpo está em repouso é chamado de comprimento próprio ou comprimento de repouso. O comprimento medido em outro referencial em relação ao qual o corpo está se movendo (na direção da dimensão que está sendo medida) é sempre menor do que o comprimento próprio”⁶.

Utilizando a notação em que temos Δt_0 para tempo próprio e Δt para tempo relativo, podemos reescrever as equações anteriores, introduzindo uma nova notação para os comprimentos, de forma que L é o comprimento relativo e L_0 o comprimento próprio:

$$L = v \cdot \Delta t_0$$

$$L_0 = v \cdot \Delta t$$

Dividindo as equações:



$$\frac{L}{L_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t}$$

Sabendo que $\Delta t = \Delta t_0 \cdot \gamma$:

$$\frac{L}{L_0} = \frac{1}{\gamma}$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

A contração do comprimento se dá no sentido do movimento, ou seja, se a velocidade tiver apenas componente x , os comprimentos em y e z não serão afetados. Como está ilustrado na figura 5, a contração é proporcional a velocidade, isto é, quanto maior a velocidade, maior a contração sofrida pelo corpo.

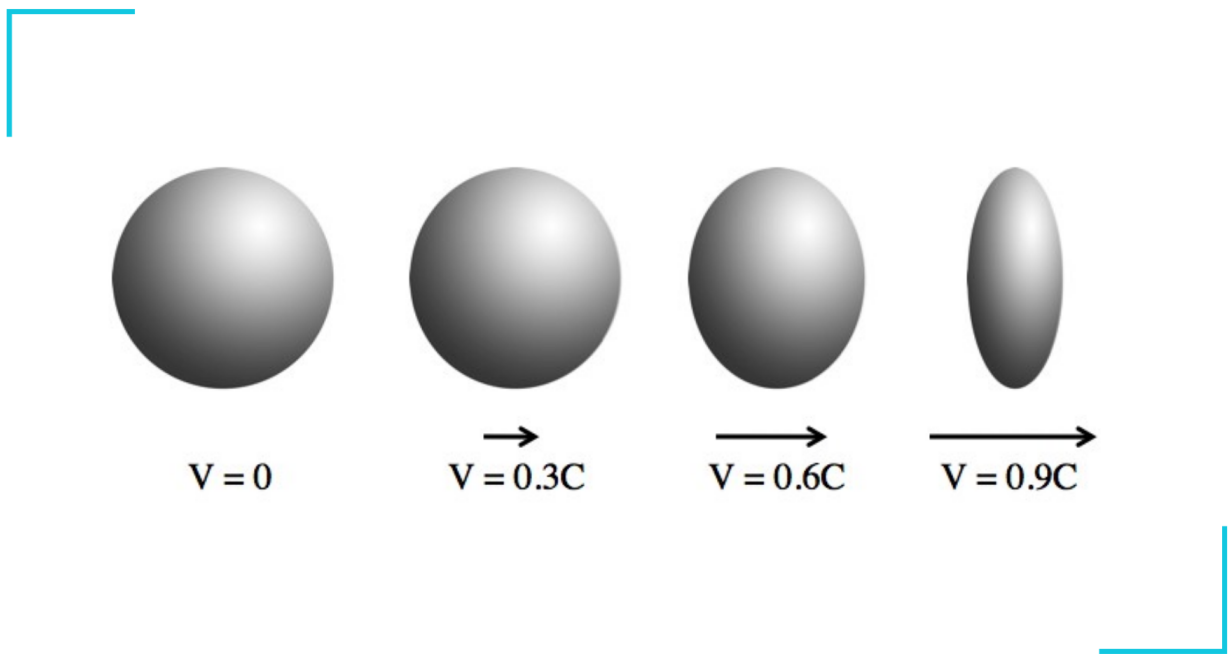


Figura 5: Imagem ilustrando a contração do comprimento.

7. Transformações de Lorentz

As relações aqui demonstradas podem ser compiladas em um conjunto de equações que transformam as coordenadas espaço-temporais de determinado evento de um determinado referencial inercial para outro.

Como apresentado na figura 6, tem-se que A é um evento qualquer de coordenadas $A(x,y,z,t)$ no referencial S e $A(x',y',z',t')$ no referencial S' , de tal forma que S' se move com velocidade v constante em relação a S na direção do eixo x .



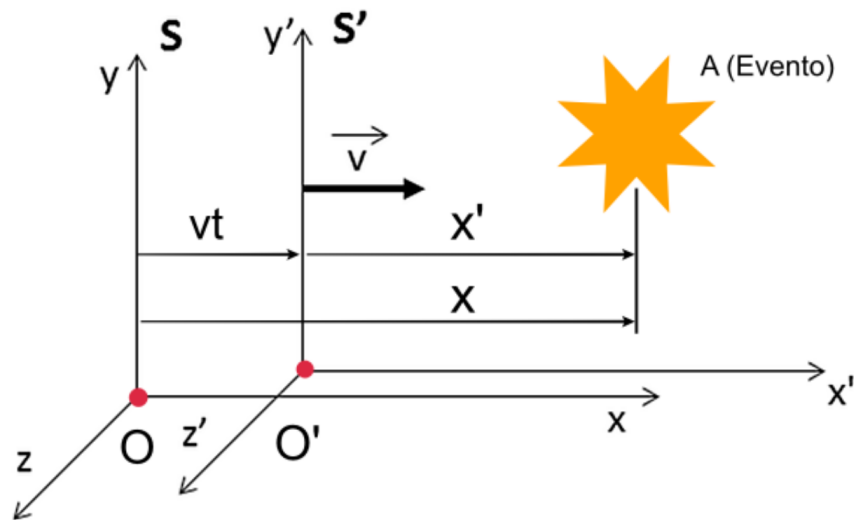


Figura 6: Referenciais inerciais S e S'.

Analisando a imagem de uma perspectiva clássica, poderíamos dizer que $x = vt + x'$. Entretanto, dada a alta velocidade v , $x \neq vt + x'$, pois x e x' são medidos em referenciais diferentes: o primeiro no referencial S e o segundo no referencial S' . Portanto, seria como somar duas coisas de classes diferentes: maçãs com bananas. O deslocamento vt por sua vez já está sendo medido no referencial S , já que v é a velocidade de S' em relação a S . Pela contração do comprimento, o valor medido de x' segundo S é x'/γ . Sendo assim, segue que:

$$x = vt + \frac{x'}{\gamma}$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

Agora, e se quisermos as transformações de x' no referencial S' para x no referencial S , tal que S se mova com velocidade $-v$? Na prática, ocorre apenas uma mudança de sinal devido ao fato de a velocidade ser $-v$ e não mais v , apesar de que tal afirmação é incorreta conceitualmente. Dessa forma:

$$x = \gamma(x' + vt')$$

Além disso, precisamos das transformações de tempo de t para t' e vice-versa. Substituindo x' na última equação, resolveremos para t' :

$$x = \gamma(\gamma(x - vt) + vt')$$



$$x = \gamma^2(x - vt) + (\gamma vt')$$

Sabe-se que $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$, portanto podemos reescrever a equação como:

$$x = \frac{x - vt}{1 - \beta^2} + \gamma vt'$$

Isolando t' no lado esquerdo da equação, ficamos com:

$$t' = \frac{x(1 - \beta^2) - x + vt}{\gamma v(1 - \beta^2)}$$

$$t' = \frac{-x \left(\frac{v}{c}\right)^2 + vt}{\gamma v(1 - \beta^2)}$$

$$t' = \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\gamma(1 - \beta^2)}$$

Se $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$, é verdade que $1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$. Sendo assim:

$$t' = \gamma^2 \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\gamma}$$

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

Como feito anteriormente, a transformação das coordenadas do referencial S' para S , se movendo com velocidade $-v$ é dada por $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$. Sintetizando, as transformações de Lorentz são:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + vx'/c^2) \end{array} \right.$$

Uma forma de interpretar essas coordenadas é através do conceito de intervalos, onde a coordenada inicial de cada dimensão seria a coordenada da origem, tida implicitamente como $O(0,0,0,0)$ ou $O'(0,0,0,0)$ desde o início dessa dedução. A partir disso, podemos generalizar as transformações de Lorentz para intervalos entre dois eventos distintos, como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2) \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \\ \Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2) \end{array} \right.$$



Vale ressaltar que tais equações são válidas apenas para velocidades na direção dos eixos x e x' , ou seja, não são válidas para velocidades com mais de uma componente. Além disso, tais equações se reduzem às transformações da mecânica clássica para $v \ll c$ e para as equações que descrevem a dilatação do tempo e contração do comprimento para velocidades comparáveis a da luz (isso fica de exercício para o leitor, claro).

8. Efeito Doppler Relativístico

Como visto anteriormente, o tempo não passa da mesma forma para todos os observadores. Consequentemente, isso terá um impacto no comprimento da radiação emitida por fontes com velocidades comparáveis à velocidade da luz. Portanto, a equação de efeito Doppler clássico não é mais válida para tais casos, devendo ser substituída pela equação abaixo, demonstrada pelo Otávio no material de [Redshift e Lei de Hubble](#).

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1$$

Lembrando que β é o parâmetro da velocidade, tal que $\beta = v/c$.

9. “Adição” de velocidades

No contexto da mecânica clássica tem-se a adição de velocidades de Galileu, de forma que $u = u' + v$, como já conversamos. Ainda de uma perspectiva da Mecânica Clássica, vamos supor que $v = 0,5c$ e $u' = 0,7c$, levando ao resultado de $u = 1,2c$ o que contraria o segundo postulado da relatividade.

Portanto, é necessária uma nova forma de “somar” velocidades para os casos relativísticos. Primeiramente, sabe-se que $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ é a velocidade do objeto segundo o referencial S e $u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ é a velocidade do objeto segundo o referencial S' , como ilustra a Figura 7. Utilizando as transformações de Lorentz para os intervalos de x e t , temos que:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$u = \frac{\gamma(\Delta x' + v\Delta t')}{\gamma(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2})}$$

Multiplicando o lado direito da equação por $\frac{\Delta t'}{\Delta t'}$

$$u = \frac{\gamma(\Delta x' + v\Delta t')}{\gamma(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2})} \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t'}$$

$$u = \frac{(u' + v)u'c^2\Delta t'}{\Delta x'(c^2 + u'v)}$$



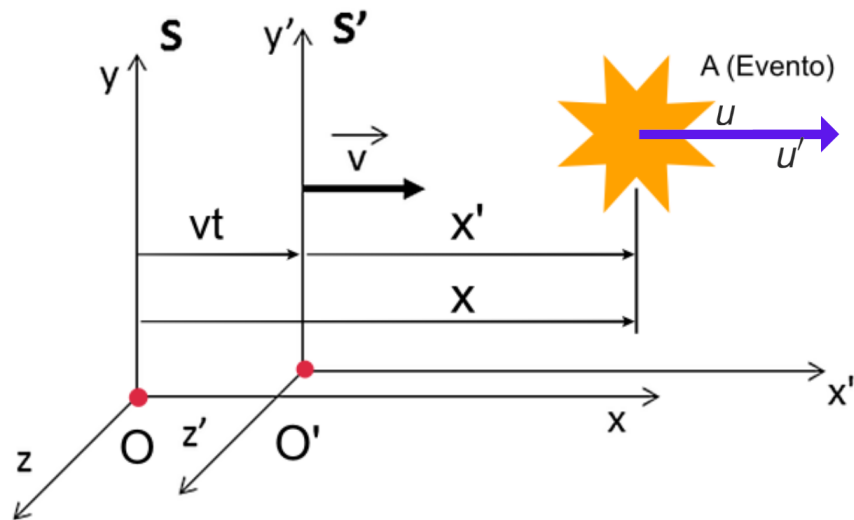


Figura 7: Adição de velocidades.

Como $\frac{1}{u'} = \frac{\Delta t'}{\Delta x'}$, podemos simplificar para

$$u = \frac{(u' + v)u'c^2}{u'(c^2 + u'v)}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

10. Momento linear

Adotar a definição clássica de momento linear ($\vec{p} = m\vec{v}$) implicaria na sua não conservação na maioria dos referenciais inerciais, perdendo então a importância desse conceito. Visando resolver esse problema, vamos deduzir uma nova expressão para o momento linear para ser utilizado em corpos com velocidades comparáveis a da luz.

Para isso, temos a seguinte situação: uma partícula massiva B em repouso segundo o referencial S' , que se move com velocidade v em relação ao referencial S , tal que $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, onde tanto Δx quanto Δt são medidas relativas, enquanto que Δx_0 e Δt_0 são medidas próprias, ou seja, referentes ao referencial solidário à partícula. Da expressão clássica, temos que:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p} = m \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$



Buscando uma definição de momento que seja conservado para todos os referenciais, usaremos $\vec{p} = m \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t_0}$. Multiplicando o lado direito da equação por $\frac{\Delta t}{\Delta t}$ e sabendo que $\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0}$ temos:

$$\vec{p} = m \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t_0} \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

$$\vec{p} = m \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \gamma$$

Como a velocidade da partícula medida pelo referencial S é $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, podemos substituir e encontraremos que:

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v}}$$

Talvez você já tenha ouvido falar em “massa relativística” e que ela aumentaria conforme aumenta a velocidade do corpo, entretanto saiba que esse termo constitui um erro conceitual, pois é o momento da partícula que é afetado e não a massa dela em si. Em outras palavras, não se cria mais matéria ou algo do tipo quando se viaja a uma velocidade mais alta e sim se aumenta a inércia daquele corpo. Alguns materiais mais antigos costumam trazer a massa relativística m e a massa de repouso m_0 de forma que $m = \gamma m_0$ e portanto $\vec{p} = m \vec{v}$, apesar de que essas expressões não carregam o significado adequado e apenas confundem o estudante.

É através do conceito de momento que encontra-se uma das justificativas para a velocidade da luz ser um limite.⁷ A definição de impulso não sofre alterações, permanecendo como

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

O gráfico da figura 8 mostra o momento relativístico e clássico em função da velocidade. A partir dele, nota-se que (a) a mecânica clássica concorda com a relatividade para velocidades de até $0,4c$ e que (b) o momento relativístico cresce muito rapidamente conforme cresce a velocidade. Dessa forma, é visível que o impulso necessário para aumentar a velocidade se torna cada vez mais maior conforme se aumenta a velocidade. Como ilustrado pelo gráfico, $\vec{I} \rightarrow \infty$ conforme $v \rightarrow c$, necessitando de um impulso infinito para atingir c .⁸

11. Energia total

A energia total de um corpo é, por definição, a soma da energia de repouso E_0 com a energia cinética K , ou seja, $E = E_0 + K$. De forma que⁹:

$$\boxed{E = \gamma m c^2}$$

As próximas seções serão dedicadas à Energia de Repouso e a Energia Cinética, respectivamente.

⁷Uma outra justificativa exigiria uma introdução aos diagramas de Minkowski, o que foge do escopo dessa aula, apesar de ser realmente interessante.

⁸Em outras palavras, isso significa que a Millennium Falcon não consegue viajar mais rápido que a luz.

⁹Essa equação será derivada no último problema.



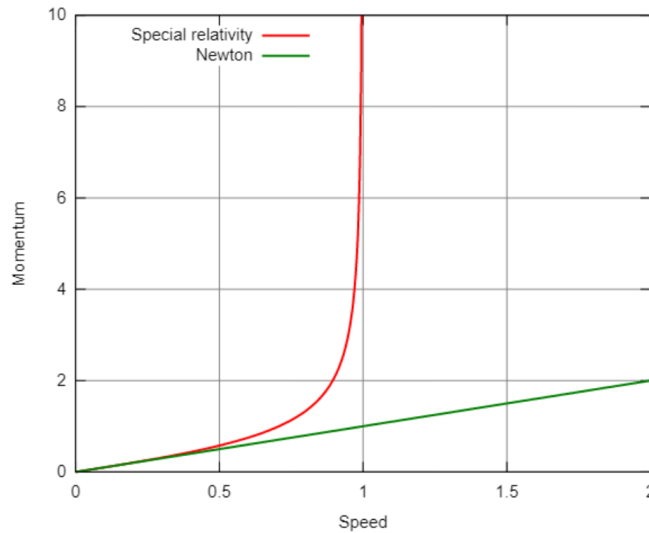


Figura 8: Momento linear relativístico

12. Energia de Repouso

Pense por um momento qual foi a primeira equação da física que você já viu. Pensou? Bom, eu aposto que foi $E = mc^2$. Essa é, definitivamente, a equação mais famosa e recorrente, estando estampada em camisetas, muros e filmes, algo realmente notável, dado que muitas pessoas não gostam de física. Com ela, energia e massa passam a ser sinônimos, de modo análogo a união que se teve entre o espaço e o tempo e enfatizada posteriormente por Minkowski. Pois bem, vamos descobrir como deduzi-la!¹⁰

A situação que iremos equacionar é a seguinte: dois observadores S e S' , de forma que S' está se movendo com v em relação a S , observam um corpo B em repouso em relação a S emitir dois feixes de luz ao longo do eixo y . Por motivos de clareza, vamos utilizar m_i para a massa do corpo antes da emissão e m_f para a massa do corpo após a emissão do feixe de luz.

Os pulsos emitidos pelo corpo B são, para o referencial S' , emitidos com uma aberração tal que $\text{sen}\alpha = \frac{v}{c}$. Além disso, sabe-se que o momento de uma onda eletromagnética é $p = E/c$, onde E é sua energia. Sendo ΔE a energia dos dois pulsos, temos pela conservação do momento no referencial S' que:

$$-m_i v = -m_f v - \frac{\Delta E}{c} \text{sen}\alpha$$

Substituindo $\text{sen}\alpha = \frac{v}{c}$ e reorganizando a equação:

$$\frac{\Delta E v}{c^2} = v(m_i - m_f)$$

¹⁰Existem várias formas de deduzir a energia de repouso, sendo que esse [artigo](#) apresenta outras três versões além da apresentada



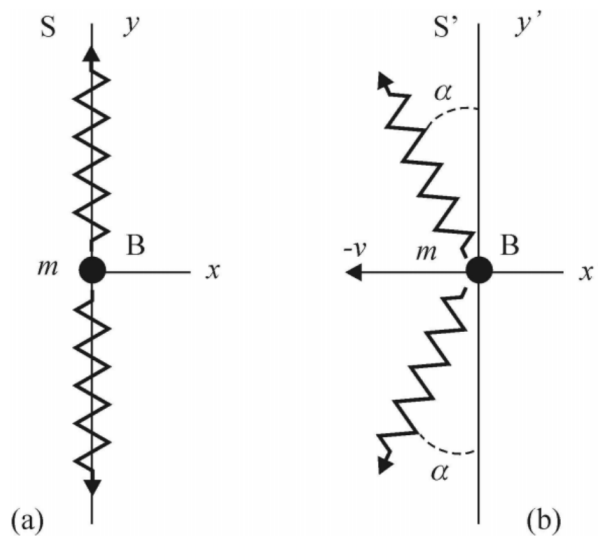


Figura 9: Emissão dos pulsos ilustrada para o caso do referencial S e S' , respectivamente.

Sendo $\Delta m = m_i - m_f$, podemos reescrever a equação da seguinte forma.

$$\frac{\Delta E}{c^2} = \Delta m$$

Voilà! De modo análogo ao que fizemos nas transformações de Lorentz para intervalos de coordenadas entre dois eventos, podemos afirmar que $E_0 = mc^2$, onde E_0 é a energia de repouso de determinado corpo e m é sua massa.

Da parte conceitual, temos que essa equação não descreve uma possível conversão entre massa e energia e sim uma relação de equivalência entre essas duas grandezas. Por isso, essa equação também é chamada de “Equivalência Massa-Energia”.

13. Energia Cinética

A seção anterior tratava apenas da energia para corpos em repouso, fazendo-se necessária uma forma de calcular também sua energia cinética. Como mostrado anteriormente, $E = E_0 + K$. Consequentemente:

$$K = E - E_0$$

$$K = \gamma mc^2 - mc^2$$

$$K = (\gamma - 1)mc^2$$



14. Teorema de Pitágoras

Coincidentemente, as grandezas de energia total, energia de repouso e momento linear podem ser relacionadas através da aplicação do teorema de Pitágoras nos lados de um triângulo retângulo. Primeiramente, sabe-se que $p = \gamma m v \Leftrightarrow v = \frac{p}{\gamma m}$. Elevando a energia total ao quadrado, temos:

$$E^2 = \frac{(mc^2)^2}{\left(\sqrt{1 - \beta^2}\right)^2}$$
$$E^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = (mc^2)^2$$
$$E^2 = (mc^2)^2 + \left(E \frac{v}{c}\right)^2$$

Substituindo $v = \frac{p}{\gamma m}$:

$$E^2 = (mc^2)^2 + \left(E \frac{p}{\gamma m c}\right)^2$$

Multiplicando o segundo termo do lado direito da equação por $(c/c)^2$:

$$E^2 = (mc^2)^2 + \left(\frac{E p c}{\gamma m c^2}\right)^2$$

Como $E = \gamma m c^2$:

$$\boxed{E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2}$$

15. Bônus: Quando $v \ll c$

Uma das coisas mais importantes para a validação de uma nova teoria é a capacidade de descrever fenômenos que são bem explicados pela antiga teoria. Para isso, vamos ver se essas equações todas se reduzem às existentes na Mecânica Clássica quando $v \ll c$, começando pelo fator de Lorentz.

Usando a expansão binomial de forma que $g = -\beta^2 = -(v/c)^2$, temos:

$$(1 + g)^n = (1 + ng) + \frac{n(n-1)}{2!}g^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}g^3 + \dots$$

Desprezando os termos de segunda ordem ou maiores:

$$(1 + g)^n \approx 1 + ng$$

Dessa forma, quando $v \ll c$:

$$\gamma = (1 + g)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\gamma = 1 + g \left(-\frac{1}{2}\right)$$



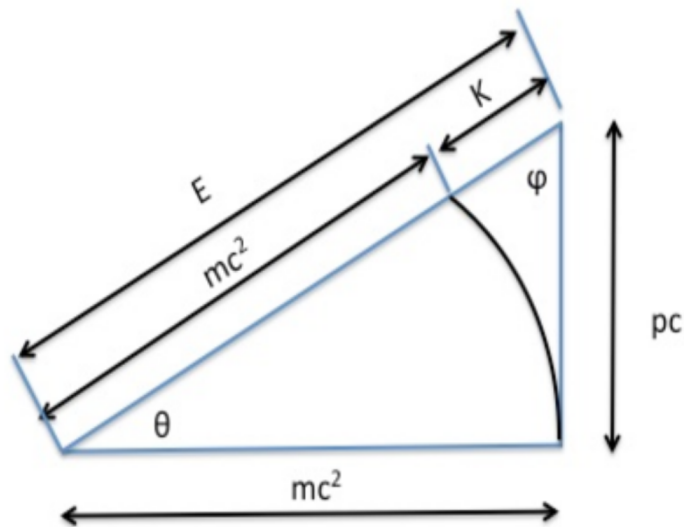


Figura 10: O triângulo retângulo mais bonito de todos.

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

Substituindo essa aproximação nas equações encontradas, temos que elas se reduzem as equações tidas na mecânica clássica, ficando isso como exercício ao leitor. No caso da energia cinética, temos:

$$K = (\gamma - 1)mc^2$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) mc^2$$

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

16. Conclusões

O assunto aqui tratado é, como dito anteriormente, muito contraintuitivo. Nesse sentido, espero que tenha aprendido alguma coisa nova com essa breve aula, entretanto, é fortemente recomendado que assista videoaulas, leia outras explicações e reflita sobre o que foi exposto.

17. Problemas

Os exercícios a seguir foram retirados dos livros “Fundamentos de Física: Volume 4, Óptica e Física Moderna” de Halliday & Resnick, “IOAA Book” e “Special Relativity: For the Enthusiastic Beginner” de Morin, além da P2 - Vinhedo 2020.



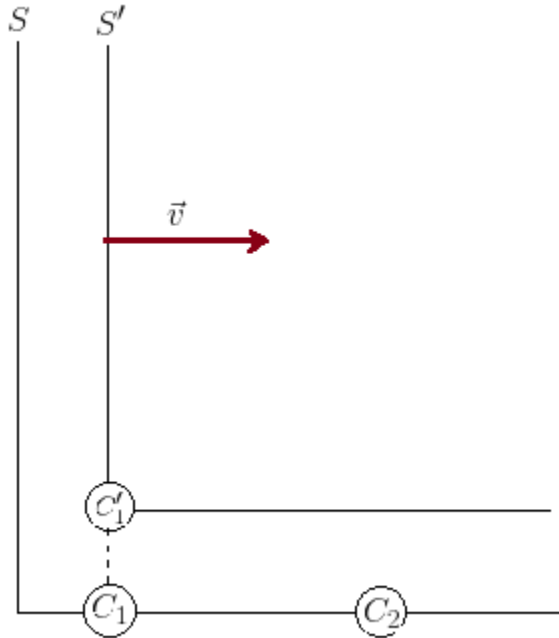


Figura 11: Problema 2

Problema 1. (Halliday & Resnick) A vida média de múons freados num bloco de chumbo, fixo num laboratório, é $2,2\mu s$. A vida média dos múons com grande velocidade, numa explosão de raios cósmicos, observada da Terra, é $16\mu s$. Ache a velocidade destes múons dos raios cósmicos em relação à Terra.

Problema 2. (Halliday & Resnick) Os relógios C_1 e C_1' indicam $t = 0$ no momento em que passam um pelo outro. Quando os relógios C_1 e C_1' passam um pelo outro, (a) qual dos relógios indica o menor tempo? (b) Qual dos relógios indica tempo próprio?

Problema 3. (Halliday & Resnick) No livro e no filme “O Planeta dos Macacos”, astronautas em hibernação viajam para um futuro distante, em uma época em que a civilização humana foi substituída por uma civilização de macacos. Considerando apenas a relatividade restrita, determine quantos anos os astronautas viajariam, no referencial da Terra, se dormissem durante 120 anos, de acordo com o referencial da espaçonave, enquanto viajavam com uma velocidade de $0,9990c$, primeiro para longe da Terra e depois de volta para o nosso planeta.

Problema 4. (Halliday & Resnick) Uma partícula instável de alta energia entra em um detector e deixa um rastro com $1,05\text{mm}$ de comprimento, viajando a uma velocidade de $0,992c$, antes de decair. Qual é o tempo de vida próprio da partícula? Em outras palavras, quanto tempo a partícula levaria para decair se estivesse em repouso em relação ao detector?



Problema 5. (Halliday & Resnick) Uma espaçonave cujo comprimento de repouso é 130 m passa por uma base espacial a uma velocidade de $0,740c$. (a) Qual é o comprimento da nave no referencial da base? (b) Qual é o intervalo de tempo registrado pelos tripulantes da base entre a passagem da proa e a passagem da popa da espaçonave?

Problema 6. (Halliday & Resnick - modificado) As origens dos dois referenciais, S e S', coincidem em $t = t' = 0$ e a velocidade relativa é de $0,950c$. Dois micrometeoritos colidem nas coordenadas $x=100\text{km}$ e $t = 200\mu\text{s}$ de acordo com um observador estacionário no referencial S. Determine as coordenadas (a) espacial e (b) temporal da colisão de acordo com um observador estacionário no referencial S'.

Problema 7. (Halliday & Resnick) A galáxia A está se afastando da Terra com uma velocidade de $0,35c$. A galáxia B, situada na direção diametralmente oposta, está se afastando de nós com a mesma velocidade. Que múltiplo de c corresponde à velocidade de recessão medida por um observador da galáxia A (a) para nossa galáxia; (b) para a galáxia B?

Problema 8. (Halliday & Resnick) Uma esquadrilha de espaçonaves com 1,00 ano-luz de comprimento (no seu referencial de repouso) está se movendo com uma velocidade de $0,800c$ em relação a uma base espacial. Uma nave mensageira viaja da retaguarda à vanguarda da esquadrilha com uma velocidade de $0,950c$ em relação à base espacial. Quanto tempo leva a viagem (a) no referencial da nave mensageira, (b) no referencial da esquadrilha e (c) no referencial da base espacial?

Problema 9. (Halliday & Resnick) Uma espaçonave está se afastando da Terra a uma velocidade de $0,20c$. Uma fonte luminosa na popa da nave emite luz com um comprimento de onda de 450nm de acordo com os passageiros. Determine (a) o comprimento de onda e (b) a cor (azul, verde, amarela ou vermelha) da luz emitida pela nave do ponto de vista de um observador terrestre.

Problema 10. (Halliday & Resnick) Determine a menor energia cinética necessária para transformar um núcleo de ^{12}C (cuja massa é $11,99671$ uma) em três núcleos de ^4He (que possuem uma massa de $4,00151$ uma cada um). Dado: $1\text{uma} = 1,66054 \cdot 10^{-27}\text{kg}$.

Problema 11. (IOAA - modificado) A maioria da energia emitida pelo Sol é gerado no seu núcleo via cadeia próton-próton (p-p) de reações nucleares, que possui três etapas diferentes. A etapa mais energética transforma 2He^3 em $\text{He}^4 + 2\text{H}^1$. Calcule a energia liberada (em MeV) e a fração da massa inicial transformada em energia. Dados: Massa do Hélio-3 (He^3)= $2808,30$ MeV; Massa do Hélio-4 (He^4)= $3727,40$ MeV e Massa do Hidrogênio-1 (H^1)= $938,27$ MeV.

Problema 12. (IOAA - modificado) Suponha que uma estrela tenha uma massa de $20M_{\odot}$. Se 20% da massa da estrela estiver na forma de hélio, calcule o tempo de vida da estrela consumindo hélio. Assuma que a luminosidade da estrela é de $100L_{\odot}$, sendo que 30% provém da queima do hélio. Assuma que nenhum hélio adicional está sendo produzido nesse tempo e que todo o hélio está disponível para consumo. A fusão de hélio em carbono se dá pelo processo triplo- α dado por $3\text{He}^4 \rightarrow \text{C}^{12} + \gamma$. Dados: Massa carbono = $12,000000$ uma, massa do hélio= $4,002602$ uma, $L_{\odot} = 3,830000 \cdot 10^{28} M_{\odot} = 2,000000 \cdot 10^{30} \text{kg}$.



Problema 13. (Halliday & Resnick) Em uma colisão de alta energia entre uma partícula dos raios cósmicos e uma partícula da parte superior da atmosfera terrestre, 120 km acima do nível do mar, é criado um pión. O pión possui uma energia total E de $1,35 \cdot 10^5 \text{ MeV}$ e está se movendo verticalmente para baixo. No referencial de repouso do pión, o pión decai 35,0 ns após ser criado. Em que altitude acima do nível do mar, do ponto de vista de um observador terrestre, ocorre o decaimento? A energia de repouso do pión é 139,6 MeV.

Problema 14. (Halliday & Resnick) Os astrônomos acreditam que os quasares são núcleos de galáxias ativas nos primeiros estágios de formação. Um quasar típico irradia energia a uma taxa de 10^{41} W . Com que rapidez a massa de um quasar típico está sendo consumida para produzir essa energia? Expresse a resposta em unidades de massa solar por ano, em que uma unidade de massa solar ($M_{\odot} = 2,00 \cdot 10^{30} \text{ kg}$) é a massa do Sol.

Problema 15. (P2 - Vinhedo 2020) Shell e Nathan são imperadores supremos de planetas em dois sistemas estelares inimigos. A distância entre os planetas equivale a 15,0 anos-luz. Um dia, após séculos de guerras, Shell decidiu lançar um ataque para destruir Nathan de uma vez por todas. Para isso, Shell decidiu voar em sua nave mais poderosa, que pode atingir uma velocidade de $0,750c$ e acelerar quase instantaneamente, para utilizar sua arma mais poderosa no planeta de Nathan.

(a) Shell começa a preparar sua arma assim que a nave sai de seu planeta. Considerando que Shell precisa estar com a arma pronta assim que ele chegar no planeta de Nathan, quanto tempo ele pode demorar para preparar a arma?

A arma de Shell atira um composto radioativo extremamente tóxico. O tempo de meia-vida desse composto é igual a 12,25 milissegundos e a razão entre a quantidade na amostra em função do tempo e a quantidade inicial é descrita por uma função exponencial na base e (número de Euler) cujo expoente é negativo e diretamente proporcional ao tempo. A arma de Shell é capaz de atirar esse composto a uma taxa de 158 mol/s e a uma velocidade de $0,300c$. Importante: O tempo de meia vida corresponde ao intervalo de tempo necessário para que a amostra seja reduzida pela metade. Shell estaciona sua nave imediatamente acima da atmosfera do planeta de Nathan, que possui uma espessura de 706 km, e mira no palácio de Nathan, localizado ao nível do mar.

(b) As defesas do palácio de Nathan conseguem resistir a um ataque de no máximo 112 mol/s. Dessa forma, Nathan consegue sobreviver ao ataque de Shell?

(c) Caso Shell não tivesse estacionado a nave e atirasse em movimento logo acima da atmosfera do planeta, Nathan teria sobrevivido ao ataque? Nesse caso, $0,300c$ seria a velocidade relativa entre o tiro e a nave movendo-se a $0,750c$?

Problema 16. (Special Relativity: For the Enthusiastic Beginner - adaptado) Aceitando o fato de que a energia e o momento de um fóton são $E = hf$ e $p = \frac{hf}{c}$ (onde h é a constante de Planck e f a frequência da onda), derive a fórmula relativística para a energia total, $E = \gamma mc^2$. Faça isso considerando uma massa m que decai em dois fótons. Observe o decaimento no referencial de repouso da massa e no referencial onde a massa se move com velocidade v ao longo da linha de movimento dos fótons. Dica: Você vai precisar usar o Efeito Doppler.



18. Resolução

Problema 1. Observando o enunciado temos que Δt é o tempo medido pelos múons criados na atmosfera e que Δt_0 é o tempo marcado pelo observador no laboratório. Para achar a velocidade dos múons, utilizaremos a equação da dilatação do tempo para encontrar o valor de γ :

$$\Delta t = \Delta t_0 \gamma$$

$$16 = 2,2\gamma$$

$$\frac{16}{2,2} = \gamma$$

$$7,27 = \gamma$$

$$7,27 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\boxed{v = 0,9905c}$$

Problema 2. O tempo próprio é o medido por um relógio que se desloca junto com o referencial, ou seja está em repouso em relação ao referencial. Portanto, o relógio C'_1 marca o tempo próprio. Como o tempo próprio é menor que o relativo, ambos os itens referem-se ao relógio C'_1 .

Problema 3. Como intervalo de tempo próprio, temos o que foi medido na referencial do foguete, ou seja, 120 anos. O enunciado informa que a velocidade do foguete é $0,999c$. Calculando o fator Lorentz ou γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,999)^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{0,0447}$$

Substituindo o tempo próprio e o γ na equação de dilatação do tempo:

$$\Delta t = 120 \cdot \gamma$$

$$\boxed{\Delta = 2683,95 \text{anos}}$$

Ou seja, se passaram 2683,95 anos para um observador na Terra.



Problema 4. O rastro medido tem como referencial o laboratório, ou seja, o tempo marcado é o tempo relativo. Utilizando a equação para cálculo de velocidade, temos que, o tempo em segundos é igual a:

$$dt = \frac{dx}{v}$$

Substituindo:

$$\Delta t = \frac{1,05 \cdot 10^{-3}}{0,992 \cdot 299.792.458}$$

$$\Delta t = 3,53 \cdot 10^{-12} s$$

Calculando γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{0,126}$$

Substituindo os valores obtidos na equação da dilatação do tempo, temos que, o tempo de vida, em segundos, no referencial da partícula, (tempo próprio) se dá por:

$$\Delta t = \Delta t_0 \cdot \gamma$$

$$3,53 \cdot 10^{-12} = \Delta t_0 \cdot \frac{1}{0,126}$$

$$\boxed{\Delta t_0 = 4,56 \cdot 10^{-13} s}$$

Problema 5. Retirando as informações do enunciado, temos que $L_0 = 130$ metros e $v = 0,74c$. O comprimento medido pelo referencial na base é o comprimento relativo, portanto:

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

Calculando γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,74)^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{0,6726}$$

Substituindo na equação do comprimento relativo:



$$L = \frac{130}{\frac{1}{0,6725}}$$

$$\boxed{L = 87,44\text{m}}$$

Portanto, respondendo o item (a), a espaçonave vai ser observada com 87,44 metros por observadores na base espacial.

O intervalo entre os dois eventos, pode ser obtido utilizando a equação da velocidade, já que a velocidade é constante.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{\Delta t = 3,94 \cdot 10^{-7}\text{s}}$$

Logo, respondendo o item (b), o intervalo de tempo medido foi de $3,94 \cdot 10^{-7}$ segundos.

Problema 6. Primeiramente, calcula-se o fator gamma

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\gamma = 3,203$$

Sabe-se que $1\text{km} = 10^3\text{m}$ e $1\mu\text{s} = 10^{-6}\text{s}$. Utilizando as transformações de Lorentz, temos que (a)

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$x' = 1,377 \cdot 10^5\text{m}$$

(b)

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$t' = 3,737 \cdot 10^{-4}\text{s}$$

Problema 7. (a) Se, na Terra, observamos a galáxia A se afastando com velocidade $0,35c$, a galáxia A vai observar a nossa galáxia de afastar com velocidade $\boxed{0,35c}$.

(b) Analisando a situação, temos que v é a velocidade com que a galáxia A (referencial S') se afasta da Terra (referencial S) e que u e u' são as velocidades da galáxia B medidas, respectivamente, pela Terra e pela galáxia A. Adotando o sentido do afastamento da galáxia A como positivo, temos $v = 0,35c$ e $u = -0,35c$. Utilizando a soma relativística de velocidades, temos

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$$u' = \frac{-0,35c - 0,35c}{1 - \frac{(-0,35c)0,35c}{c^2}}$$



$$\boxed{u' = 0,62c}$$

Problema 8. (a) Calculando a velocidade relativa entre a esquadilha e a nave mensageira, temos

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$$u' = -0,625c$$

Dessa forma, o comprimento percorrido é dado por

$$L = \frac{1ano - luz}{\gamma(-0,625)}$$

$$L = 7,38 \cdot 10^{15}$$

Logo, o tempo da viagem (Δt_1) é dado por

$$\Delta t_1 = \frac{L}{u'}$$

$$\boxed{\Delta t_1 = 1,25anos}$$

(b) Dizer que a esquadilha tem velocidade $u' = -0,625c$ em relação a nave mensageira corresponde a dizer que a nave mensageira tem velocidade $u = -u'$ em relação a esquadilha. Portanto, $u = 0,625c$. Logo, o tempo de viagem (Δt_2) é dado por

$$\Delta t_2 = \frac{1ano - luz}{u}$$

$$\Delta t_2 = 1,60anos$$

(c) O tempo Δt_3 é dado por

$$\Delta t_3 = \frac{L}{v_{nave} - v_{esquadilha}}$$

Onde $L = \frac{L_0}{\gamma} \rightarrow L = 0,600anos - luz$. Resolvendo para Δt_3

$$\Delta t_3 = \frac{0,600anos - luz}{0,950c - 0,800c}$$

$$\boxed{\Delta t_3 = 4,00anos - luz}$$

Problema 9. (a) Calculando o comprimento de onda recebido pelo observador na Terra,

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1$$

$$\boxed{\lambda = 550nm}$$

(b) A cor correspondente a esse comprimento de onda é verde.



Problema 10. Equacionando a reação,

$$\gamma_m + 11,99671 = 3(4,00151)$$

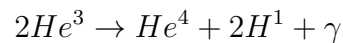
$$\gamma_m = 7,82 \cdot 10^{-3}$$

Sendo γ_m a energia mínima necessária para que ocorra a reação, em massa. Para expressar γ_m em unidades de energia podemos utilizar a equação da energia de repouso.

$$\gamma_E = \gamma_m c^2$$

$$\boxed{\gamma_E = 7,30 \text{ MeV}}$$

Problema 11. Equacionando a reação nuclear, temos



Sendo γ a energia liberada pela reação. Igualando a energia dos dois lados da equação utilizando a informações do enunciado

$$2(2808,30) = 3727,40 + 2(938,27) + \gamma$$

$$\gamma = 12,66 \text{ MeV}$$

A razão entre a massa transformada em energia (m_c) e massa inicial (m_i) é dada por

$$\frac{m_c \cdot c^2}{m_i \cdot c^2} = \frac{12,66}{2(2808,30)}$$

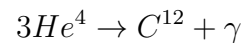
$$\boxed{\frac{m_c}{m_i} = 2,25 \cdot 10^{-3}}$$

Problema 12. Utilizando regra de três, temos não só a quantidade de hélio na estrela (M_H), mas também a quantidade de energia emitida pela queima do hélio (L_H).

$$M_H = 8,000000 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$L_H = 1,149000 \cdot 10^{28} \text{ W}$$

A partir da reação dada no enunciado, determinamos a porcentagem de massa que é convertida em energia. Utilizando as massas em unidades atômicas dadas no enunciado, temos que a quantidade de massa γ convertida em energia é de



$$3(4,002602) = 12,000000 + \gamma$$

$$\gamma = 7,806000 \cdot 10^{-3} \text{ uma}$$

A porcentagem da massa inicial convertida em energia (k) pode ser obtida por regra de três, onde obtem-se

$$k = 0,065008\%$$



Ou seja, 0,065008% da M_H será transformada em energia segundo a equação da energia de repouso. Assim, a energia total produzida pela queima do hélio é dada por

$$E_H = (0,065008\% \cdot 8,000000 \cdot 10^{30})c^2$$

$$E_H = 4,680576 \cdot 10^{44}W$$

Por fim, o tempo de vida (Δt) é dado pela energia disponível dividido pela taxa de consumo, ou seja

$$\Delta t = \frac{E_H}{L_H}$$

$$\Delta t = \frac{4,680576 \cdot 10^{44}}{1,149000 \cdot 10^{28}}$$

$$\Delta t = 4,073608 \cdot 10^{16}s$$

$$\Delta t = 1,291733 \cdot 10^9 \text{anos}$$

Problema 13. A partir da energia de repouso (dado no enunciado), podemos encontrar a massa do pión

$$m = \frac{E_0}{c^2}$$

$$m = 2,48 \cdot 10^{28}kg$$

Com isso, o fator de Lorentz referente a velocidade do pión é dado por

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}$$

$$\gamma = 967,05$$

Conseqüentemente, a velocidade do pión é $v = 0,999999465c$. O tempo de decaimento do pión medido na Terra, Δt é dado pela seguinte expressão, onde $\Delta t_0 = 35 \cdot 10^{-9}s$.

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

$$\Delta t = 3,38 \cdot 10^{-5}s$$

Logo, a distância percorrida pelo pión durante esse tempo segundo o referencial da Terra é dada por

$$\Delta x = v \Delta t$$

$$\Delta x = 11km$$

Por fim, a altitude h é obtida subtraindo Δx da altura inicial do pión, ou seja, $h = 210 - 11 \rightarrow \boxed{h=109 \text{ km}}$.

Problema 14. A taxa de consumo de energia é expressa em $J/s = W$. Portanto, “convertendo energia para massa”, temos

$$\frac{E}{\Delta t} = \Delta mc^2$$

$$\Delta m = 5,55 \cdot 10^{-7}M_\odot/s$$

Por regra de três, temos que será consumido uma massa equivalente a $\boxed{17,5M_\odot}$ em um ano.



Problema 15. (a) Shell precisa ter sua arma pronta até estar no planeta de Nathan, a uma distância D , então, no máximo, o tempo para prepará-la é o de viagem até o planeta inimigo. Os eventos do problema, “nave de Shell sai do planeta de Shell” e “nave de Shell chega ao planeta de Nathan”, acontecem na mesma posição espacial para o referencial da nave, então o intervalo de tempo entre eles para Shell e o tempo próprio dos eventos. Já para um observador no planeta de largada, os eventos acontecem com uma separação espacial, então o intervalo de tempo Δt medido por esse observador e o intervalo de tempo Δt_0 medido por Shell estão relacionados da seguinte maneira (dilatação temporal):

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

Sendo o fator gamma: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, em que v é a velocidade da nave no referencial do mencionado observador no planeta de largada. Com $v = 0,750c$ e $D = 15anos - luz$ temos que:

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{D}{v} = \frac{1}{\gamma} \frac{15anos - luz}{0,750ano - luz/ano} = \frac{1}{\gamma} \cdot 20anos$$

$$\boxed{\Delta t = 13,2anos}$$

(b) Primeiramente, vamos encontrar a taxa do composto no tiro da arma de Shell em função do tempo no referencial do composto. Seja n a taxa, $n_0 = 158mol/s$ a taxa no tempo $t = 0s$ e $t_{1/2} = 12,25ms$ a meia-vida do composto. Pelo enunciado, sabe-se que $\frac{n(t)}{n_0} = e^{-kt}$ e quando $t = t_{1/2}$ teremos $n(t) = n_0/2$, então:

$$\frac{n_0}{2} = n(t_{1/2}) = n_0 e^{-kt_{1/2}} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

$$n(t) = n_0 2^{-t/t_{1/2}}$$

A partir da expressão acima basta encontrarmos o tempo de viagem t_b , no referencial do tiro, entre a nave e o palácio de Nathan e verificar se $112 < n(t_b)$ ou $112 > n(t_b)$. Repete-se o raciocínio feito em (a), com a distância $h = 706km$ e tem-se:

$$t_b = \frac{1}{\gamma_{0,3}} \frac{h}{0,3c} = \frac{\sqrt{1-0,3^2} h}{0,3} \frac{1}{c} \Rightarrow t_b = 7,4883ms$$

Finalmente:

$$n(t_b) = n_0 2^{-t_b/t_{1/2}} = 158 \cdot 2^{-\frac{7,4883}{12,25}} = 103,43 < 112$$

Consequentemente, $\boxed{\text{Nathan consegue sobreviver ao ataque de Shell}}$.

(c) Para encontrarmos a velocidade do tiro no referencial de Nathan, basta fazer a soma relativística direta da velocidade do tiro e da velocidade da nave que movem-se no mesmo sentido. Faz-se:

$$V = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}$$



Assim, a velocidade do tiro V para Nathan será: $V = \frac{0,75+0,3}{1+0,75 \cdot 0,3}c \Rightarrow V = 0,857c$.
 Repetindo o raciocínio usado em (b) para o tempo de viagem t_c tem-se:

$$t_c = \frac{\sqrt{1 - 0,857^2}}{0,857} \cdot \frac{h}{c} \Rightarrow t_c = 1,415ms$$

Finalmente:

$$n(t_c) = n_0 2^{-t_c/t_{1/2}} = 158 \cdot 2^{-\frac{1,415}{12,25}} = 145,84 > 112$$

Conseqüentemente, Nathan não sobreviveria ao ataque de Shell.

Problema 16. Começaremos a analisar pelo referencial em repouso. Sabe-se que a energia de repouso da massa m é $E_0 = mc^2$. Pela conservação de energia, cada fóton deve ter energia $E_0/2$.

No referencial em que a massa se move com velocidade v , as frequências dos fótons estão deslocadas pelos fatores $\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ e $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$. Usando a lei de Planck, temos que as energias de cada fóton estão deslocadas pelos mesmos fatores em relação a energia no referencial de repouso, que é $E_0/2$ cada. A soma das energias de cada fóton é dada por:

$$E = \frac{E_0}{2} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + \frac{E_0}{2} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boxed{E = \gamma mc^2}$$

