Vetores e Cinemática Vetorial

Gabriel Silva - Projeto Olímpicos

1. Introdução

A motivação para o estudo dos vetores e da cinemática vetorial nasce a partir de uma necessidade de descrever de corpos, objetos, ou o que seja que esteja ao nosso arredor de maneira mais precisa. Suponha, por exemplo, que Joãozinho (famoso Joãozinho da OBMEP) esteja perdido no centro de sua cidade e queira chegar até a universidade local, então ele decide pedir uma informação e a pessoa gentilmente diz: "Basta você subir cinco quarteirões e depois dobre a direita", perceba que a linguagem utilizada para descrever, é a linguagem vetorial. Tendo isso em vista, espero que no final desta aula, você consiga interpretar e utilizar dessa linguagem matemática.

2. Vetores

Antes de definir propriamente dito, o que seria um vetor, primeiro devo-lhe apresentar a noção de grandezas escalares e vetoriais. Define-se uma grandeza escalar, como um número (módulo) acompanhado por uma unidade de medida correspondente, por exemplo: temperatura, densidade, volume, etc., percebe-se que para a interpretação de uma grandeza escalar, basta o seu valor numérico e uma unidade de medida correspondente. Por outro lado, as grandezas vetoriais necessitam de mais informações, o que chamamos de direção e sentido. Não confunda direção com sentido, podemos pensar que a direção corresponde a uma linha imaginária qualquer que liga um ponto a outro, e a esta direção, temos associado dois sentidos - supondo que a reta imaginária esteja no eixo x, o sentido seria direita ou esquerda.

Ora pois! O que seria um vetor? Definimos um vetor como um ente matemático constituído de módulo, direção e sentido. Com o auxílio deste conceito, seremos capazes de descrever movimentos em mais de uma dimensão com uma maior facilidade.

2.1 Conceitos iniciais importantes

2.1.1 Vetor Deslocamento

O vetor deslocamento, é definido como o segmento de reta obtido através da diferença entre a posição final e inicial do corpo a ser analisado. Então se imaginarmos que Joãozinho esteja parado no ponto A (Figura 1) e queira ir até o ponto B indicado, isso corresponde ao vetor $\overrightarrow{AB}$. Portanto, basta fazer a diferença entre os pontos A e B, porque ele teria que percorrer diferença dos pontos na horizontal (x_a e x_b) e em seguida, o mesmo se aplicaria na vertical (y_a e y_b), isto é, em termos matemáticos, temos:

$$\boxed{(x_b - x_a;\ y_b - y_a)} \tag{I}$$

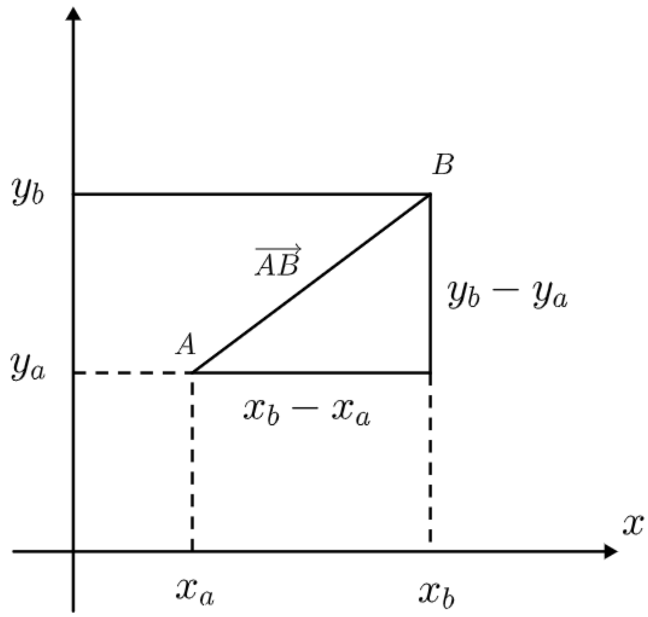


Figura 1: Vetor deslocamento $\overrightarrow{AB}$

2.1.2 *Módulo de um Vetor*

O módulo de um vetor $\vec{u}$ corresponde ao seu valor numérico que expressa o comprimento do segmento de reta orientado. A ideia é encontrar uma equação geral para obter o módulo de qualquer vetor, para isso, iremos trabalhar com vários triângulos no $\mathbb{R}^3$ (Figura 2) e a partir disso chegar numa equação.

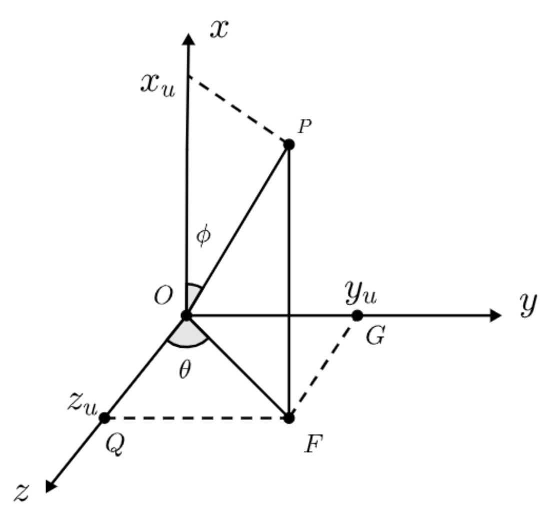


Figura 2: Módulo de um vetor

Olhando para o ΔOGF, podemos aplicar um Pitágoras e obter o módulo do vetor $\overrightarrow{OF}$:

$$|\overrightarrow{OF}^2| = y_u^2 + z_u^2$$

Fazendo o mesmo procedimento para o ΔOFP, temos:

$$|\vec{u}|^2 = |\overrightarrow{OF}|^2 + |\overrightarrow{FP}|^2$$

Mas sabemos que $|\overrightarrow{FP}|^2$ é igual a x_u^2, então substituindo e tirando a raiz de ambos os lados, ficamos com:

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}} \qquad \text{(II)}$$

2.2 *Operações com Vetores*

Da mesma forma que a partir de grandezas escalares somos capazes de realizar operações, é claro que o mesmo se aplica para grandezas vetoriais, entretanto não podemos efetuar essas tais operações da mesma maneira, tendo em vista que vetores possuem módulo, direção e sentido, e são descritos a partir de coordenadas no espaço.

2.2.1 Soma Vetorial

1. Regra da Poligonal

Supondo que temos dois vetores quaisquer $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$, e queremos efetuar esta soma vetorial. Para isto, devemos posicionar o vetor $\overrightarrow{A}$ de modo que coloquemos a origem do vetor $\overrightarrow{B}$ na extremidade do primeiro vetor (Figura 3), dessa maneira, teremos um ângulo θ entre eles, e o vetor soma, seria a origem do vetor $\overrightarrow{A}$ até a extremidade do vetor $\overrightarrow{B}$, que chamaremos de $\overrightarrow{AB}$. Feito isto, observe que temos uma figura geométrica em que conhecemos dois lados e um ângulo, portanto, podemos aplicar a lei dos cossenos — constate a demonstração desta lei em Apêndices.

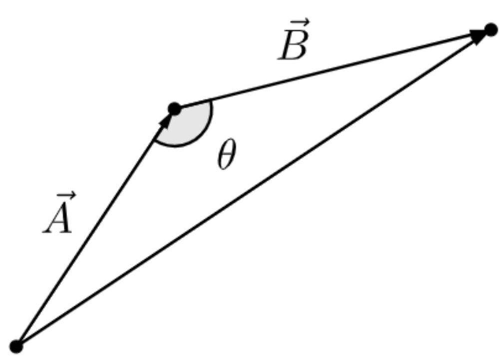


Figura 3: Vetor posição $\overrightarrow{AB}$ obtido a partir da soma vetorial

Esta maneira de somar vetores também é chamada como "regra do paralelogramo", pois se tivermos dois vetores quaisquer $\vec{w}$ e $\vec{p}$ e encaixe a origem do vetor $\vec{p}$ na extremidade do vetor $\vec{w}$ (Figura 4) e sabemos que um vetor pode ser transportado, desde que ele mantenha o seu módulo, direção e sentido, assim ele será o mesmo vetor, portanto se transportamos os vetores $\vec{w}$ e $\vec{p}$ paralelamente, o vetor soma será construído com a sua origem em um ponto qualquer e sua extremidade será do segundo vetor.

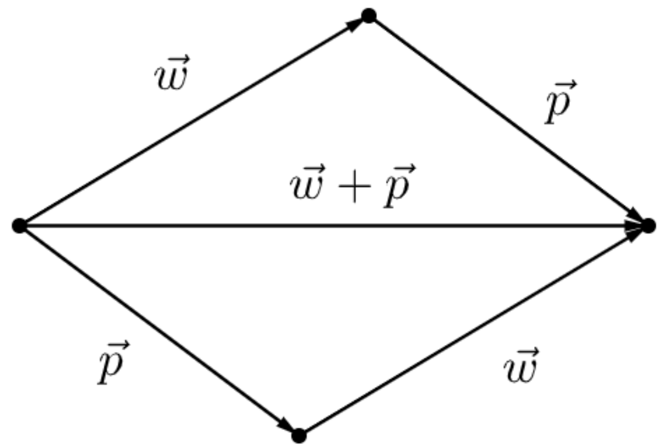


Figura 4: Soma do vetor $\vec{w} + \vec{p}$ através da regra do paralelogramo

2. Representação Geométrica

Imagine que Joãozinho queira sair do ponto A (Figura 5) e andar até o ponto B, depois até o ponto C, isto é, queremos somar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Assim fica fácil, pois já sabemos encontrar o vetor deslocamento a partir de suas coordenadas, então podemos fazer a diferença entre os pontos B e A, e dos pontos C e B, e a partir disso, somar as suas coordenadas.

$$\vec{u} = (x_b - x_a;\ y_b - y_a)$$
$$\vec{v} = (x_c - x_b;\ y_c - y_b)$$

Agora, basta somar em função das componentes de cada coordenada:

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (x_c - x_a;\ y_c - y_a)} \tag{III}$$

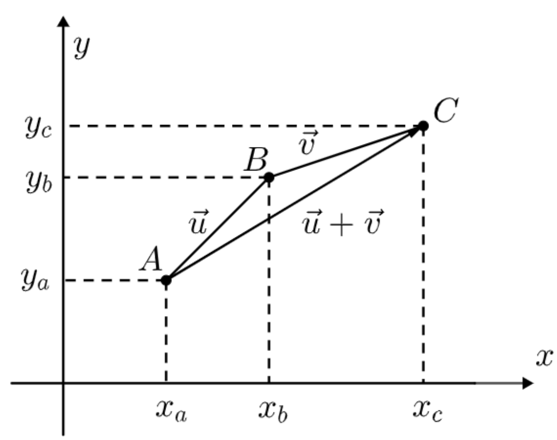


Figura 5: Soma do vetor $\vec{u} + \vec{v}$

2.2.2 *Multiplicação por um escalar*

Podemos definir um escalar como um número qualquer. Neste caso, multiplicaremos um escalar α por um vetor $\vec{u}$, para isto, devemos claro, multiplicar todas as componentes das coordenadas do vetor $\vec{u}$ pelo escalar α, isto é, em termos matemáticos:

$$\boxed{\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot u_x; \alpha \cdot u_y; \alpha \cdot u_z)} \tag{IV}$$

2.2.3 *Negativa de um vetor*

O negativa de um vetor, consiste em multiplicar um vetor qualquer $\vec{t}$ por um escalar negativo $-\beta$, então basta realizar o mesmo procedimento anterior. Ao fazer isso, você irá notar que o sentido do vetor irá trocar, porque todas as componentes da coordenada, estará sendo multiplicada por um escalar negativo.

2.2.4 *Subtração Vetorial (Representação geométrica)*

Dados dois vetores quaisquer $\vec{k}$ e $\vec{d}$ e queremos determinar a diferença entre esses dois vetores: $(\vec{k}-\vec{d})$, basta pegar o primeiro pegar e fixá-lo e multiplicar o segundo vetor por -1, porque queremos o vetor diferença, então a ideia seria multiplicar o mesmo por -1 e somar os dois vetores a partir da regra do paralelogramo, isto é:

$$\boxed{\vec{p} = \vec{k} + (-\vec{d})} \tag{V}$$

2.2.5 *Decomposição dos vetores em eixos*

Suponha que temos um vetor qualquer $\vec{v}$ no espaço e que seja de alguma utilidade ter esse vetor em função do eixo x ou y. Como podemos decompor este vetor? Simples, observe a Figura 6 e note o ângulo θ que temos entre o vetor $\vec{v}$ e os eixos.

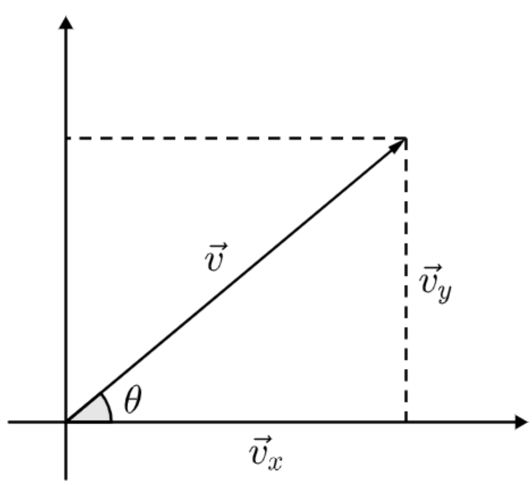


Figura 6: Decomposição vetorial

A partir desta figura, podemos encontrar o vetor $\vec{v}$ no eixo x e y:

$$sin\theta = \frac{\vec{v}_y}{\vec{v}}$$

$$cos\theta = \frac{\vec{v}_x}{\vec{v}}$$

$$\boxed{\vec{v}_x = \vec{v} \cdot \cos(\theta)} \tag{VI}$$

$$\boxed{\vec{v}_y = \vec{v} \cdot \sin(\theta)} \tag{VII}$$

Mas supondo que seja importante encontrar o vetor resultante e temos apenas $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$, basta notar que a na Figura 6, temos um triângulo retângulo, então aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\boxed{v^2 = v_x^2 + v_y^2} \tag{VIII}$$

2.2.6 Vetores unitários (Versores)

Definimos um vetor unitário como um vetor de módulo 1 que aponta para uma dada direção. Denotamos os vetores unitários da direção x, y e z, respectivamente como, $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.

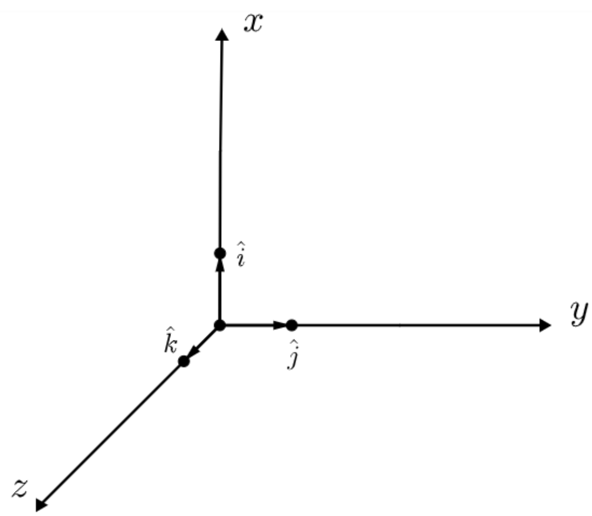


Figura 7: Versores no $\mathbb{R}^3$

Os versores têm uma grande importância para a Física, pois nos permite escrever muitas equações de maneira reduzida, observe no Apêndice, na dedução da aceleração centrípeta, que eu escrevi a decomposição do vetor posição $\vec{r}$ em x e y e a partir dos vetores unitários, eu consegui reescrever aquelas duas equações em apenas uma, simplificando as contas.

2.2.7 Produto Escalar

2.2.7.1 Método Algébrico

O produto escalar consiste no produto entre dois vetores que irá resultar um escalar (por isso o nome produto escalar). Denotamos o produto escalar como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

Para determinar o produto escalar, basta multiplicar cada componente da coordenada pela outra e depois somar, isto é, trata-se de uma soma dos produtos das respectivas coordenadas de cada vetor.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = (x_a; y_a; z_a)(x_b; y_b; z_b)$$

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b} \tag{IX}$$

O produto escalar tem algumas consequências importante dessa sua definição, irei listar cada uma delas, tente demonstrar cada uma delas.

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
2. $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u}$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

2.2.7.2 Método Geométrico

O produto escalar também possui uma interpretação geométrica, assim como a soma vetorial. A versão geométrica do produto escalar é expressa como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta)$$

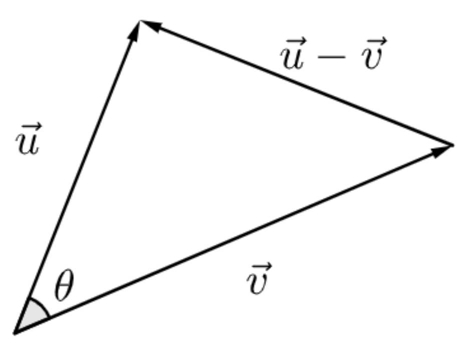


Figura 8: Produto Escalar (Método Geométrico)

Ora pois! Temos acima a Figura 8, será que dará bom se aplicarmos uma lei dos cossenos ali? Descobriremos a seguir:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\cdot|\vec{u}\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\theta)$$

$$(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\cdot|\vec{u}\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\theta)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\cdot|\vec{u}\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\theta)$$

$$-2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\cdot|\vec{u}\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\theta)$$

Como sabemos pela propriedade 2, o produto escalar ele é comutativo, dividindo ambos os lados por -2:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\theta)} \tag{X}$$

2.2.8 Produto Vetorial

O produto vetorial, como o próprio nome sugere, corresponde ao produto entre dois vetores que irá resultar outro vetor. A notação utilizada para expressar o produto vetorial é:

$$\vec{u}\times\vec{v}$$

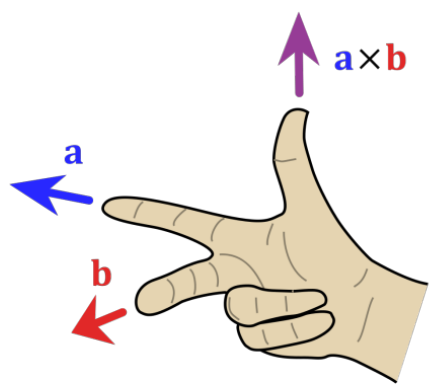


Figura 9: Regra da mão direita - Produto Vetorial

A regra da mão direita é um bizu criado pelo engenheiro eletricista John Ambrose Fleming, que nos aponta a direção e o sentido do produto vetorial, funciona da seguinte forma: você irá com sua mão direita (obviamente kk) apontar o seu dedo indicador ao primeiro vetor e o dedo do meio ao segundo (como indica a figura 9) e ao esticar o dedão, teremos a direção e o sentido do produto vetorial.

O produto vetorial é dado por:

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sin(\theta) \tag{XI}$$

Propriedades:

1. $\vec{u}\times\vec{v}$ = -$(\vec{v}\times\vec{u})$
2. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$
3. $\vec{u}\times k\vec{v} = (k\cdot\vec{u})\times\vec{v} = k\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

3. Cinemática Vetorial

Assim como a cinemática escalar que tem como objeto de estudo a descrição de corpos, sem se preocupar com as causas que levaram ao movimento ou repouso, a dita cuja, cinemática vetorial, considera o mesmo objetivo, entretanto, utiliza dos vetores para uma descrição mais abrangente.

3.1 *Deslocamento Vetorial*

Considere uma partícula que se move de maneira não uniforme (Figura 10 — imagem retirada do livro "Tópicos de Física"), em que os pontos P_1 e P_2 corresponde ao vetor posição da particular nos instantes t_1 e t_2. O deslocamento vetorial corresponde aos segmentos $\vec{d}$ indicado na figura, esse vetor é descrito como a diferença vetorial entre $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_1$.

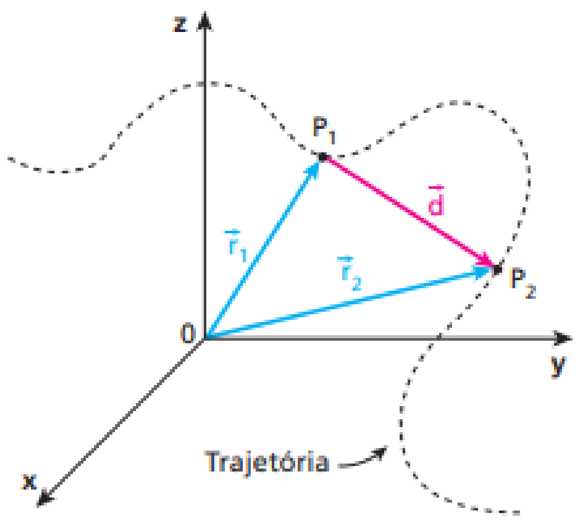


Figura 10: Deslocamento Vetorial

O vetor posição é dado pela coordenadas:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$\Delta\vec{r} = (x_b - x_a)\hat{i} + (y_b - y_a)\hat{j} + (z_b - z_a)\hat{k}$$
$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$$

Portanto, o deslocamento vetorial é dado por:

$$\boxed{\vec{d} = (x_b - x_a)\hat{i} + (y_b - y_a)\hat{j} + (z_b - z_a)\hat{k}} \qquad \text{(XII)}$$

3.2 *Velocidade vetorial média e instantânea*

A definição matemática de velocidade vetorial média é:

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}} \qquad \text{(XIII)}$$

Podemos reescrever essa velocidade em função dos vetores unitários, obtendo:

$$\vec{v} = \frac{(x_b - x_a)\hat{i} + (y_b - y_a)\hat{j} + (z_b - z_a)\hat{k}}{t_2 - t_1}$$

Se comparamos os módulos da velocidade vetorial média e da velocidade escalar, notaremos que o módulo da velocidade vetorial média será menor ou igual ao módulo da velocidade escalar, porque se observamos na figura 10, a distância $\vec{d}$ é menor ou igual ao ΔS, já que a distância em tracejado corresponde a variação do espaço, logo:

$$|\vec{v}_m| \leq |v_m|$$

Quando estivermos falando da velocidade de uma partícula em modo geral, ou seja, sua velocidade em um dado instante, estamos falando da velocidade instantânea da partícula, nesse caso, devemos considerar o limite de Δt tendendo a zero, dessa forma, teremos:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

3.3 Aceleração vetorial média e instantânea

Tendo um corpo qualquer para análise, se sua velocidade varia de v_1 para v_2 durante um intervalo de tempo Δt, dizemos que este corpo possui aceleração. A definição matemática de aceleração média é dada por:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}} \tag{XIV}$$

Quando consideramos Δt tendendo a zero em relação a um certo instante, temos a aceleração instantânea daquele corpo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Caso o módulo ou a orientação da velocidade do corpo em análise varia (ou se ambos variam), a partícula possui uma aceleração. Nesse caso, podemos reescrever a equação acima em função dos vetores unitários e obtemos:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) \\ &= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\end{aligned}$$

3.4 Velocidade relativa, de arrastamento e resultante

Imagina a seguinte situação, temos um barco em um rio (Figura 11 - imagem retirada do livro “Tópicos de Física”) e a este barco, temos uma velocidade relativa ($\vec{v}_{rel}$) que seria o movimento provocado pelo motor em relação à correnteza e a velocidade de arrastamento que é provocado pela correnteza ($\vec{v}_{arr}$).

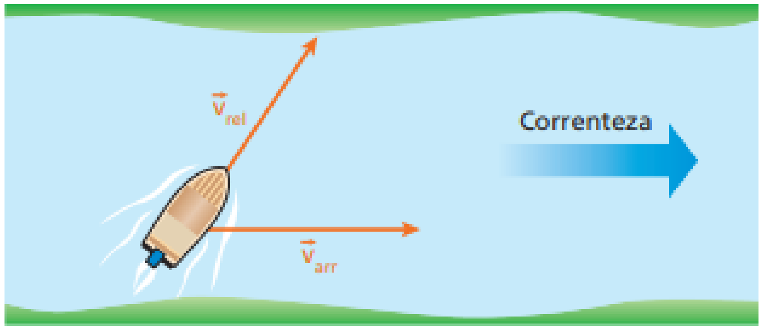


Figura 11: Velocidade Relativa

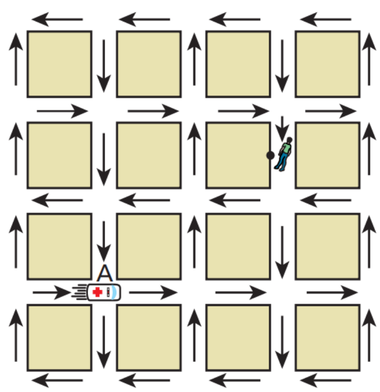
Como às duas velocidades possuem o mesmo sentido, então podemos simplesmente somar essas velocidades, isto é:

$$\boxed{\vec{v}_{res} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{arr}} \tag{XV}$$

Caso o barco estivesse navegando em sentido contrário ao da correnteza, deveríamos subtrair uma velocidade da outra.

4. Problemas

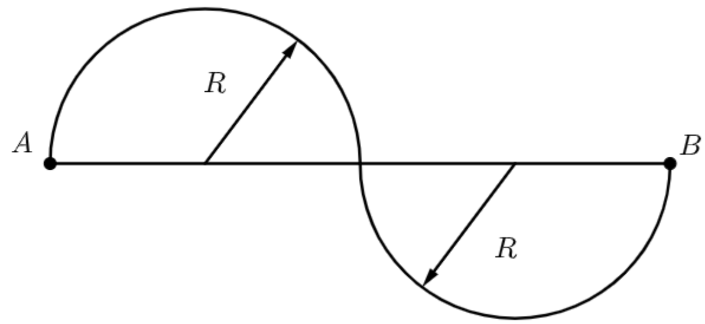
Problema 1. (Unicamp-SP) A figura abaixo representa um mapa da cidade de Vectoria o qual indica o sentido das mãos do tráfego. Devido ao congestionamento, os veículos trafegam com a velocidade média de 18 km/h. Cada quadra dessa cidade mede 200 m por 200 m (do centro de uma rua ao centro da outra rua). Uma ambulância localizada em A precisa pegar um doente localizado bem no meio da quadra em B, sem andar na contramão.



a) Qual é o menor intervalo de tempo gasto (em minutos) no percurso de A para B?

b) Qual é o módulo do vetor velocidade média (em km/h) entre os pontos A e B?

Problema 2. (Olimpíada Brasileira de Ciências - Primeira Fase) Uma partícula parte do ponto A e percorre uma trajetória constituída de duas semicircunferências de raio R = 5,0m, atingindo o ponto B. O intervalo de tempo transcorrido nesse percurso foi de 20s. Adote $\pi = 3$.



A velocidade escalar média e o módulo da velocidade vetorial média no percurso AB são, respectivamente, iguais a:

a) 0,75m/s e 0,75m/s

b) 1,0m/s e 0,75m/s

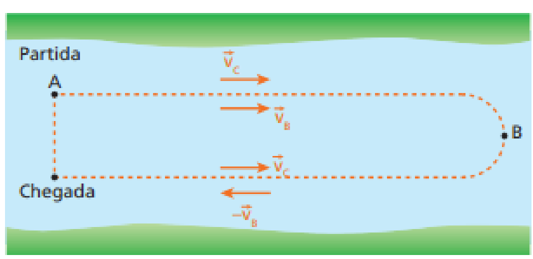
c) 1,0m/s e 1,5m/s

d) 1,5m/s e 1,0m/s

e) 1,5m/s e 1,5m/s

Problema 3. (Tópicos de Física) Uma balsa percorre o Rio Cuiabá de Porto Cercado a Porto Jofre (Pantanal mato-grossense), gastando 9,0 h na descida e 18 h na subida. O motor da balsa funciona sempre em regime de potência máxima, tal que a velocidade da embarcação em relação às águas pode ser considerada constante. Admitindo que a velocidade das águas também seja constante, responda: quanto tempo uma rolha, lançada na água em Porto Cercado e movida sob a ação exclusiva da correnteza, gastará para chegar até Porto Jofre?

Problema 4. (UFBA) Um barco vai de Manaus até Urucu descendo um rio e, em seguida, retorna à cidade de partida, conforme esquematizado na figura.



A velocidade da correnteza é constante e tem módulo v_C em relação às margens. A velocidade do barco em relação à água é constante e tem módulo v_B. Desconsiderando-se o tempo gasto na manobra para voltar, a velocidade escalar média do barco, em relação às margens, no trajeto total de ida e volta tem módulo dado por:

a) $\dfrac{V_B + V_C}{2}$

b) $\dfrac{V_B - V_C}{2}$

c) $\sqrt{V_B \cdot V_C}$

d) $\dfrac{V_B^2 + V_C^2}{V_B}$

e) $\dfrac{V_B^2 - V_C^2}{V_B}$

Problema 5. (Renato Brito - Saraeva) Um barco a motor, que ia subindo um rio, encontrou uma balsa que se movia no sentido da correnteza. Após uma hora do encontro, o motor do barco parou. O conserto do motor durou 30 min e durante esse tempo o barco moveu-se livremente no sentido da corrente. Depois do conserto, o barco começou a se mover na direção da corrente, seguindo rio abaixo com a mesma velocidade relativa à água e encontrou a balsa a uma distância de 7,5 km em relação ao primeiro encontro. Determine a velocidade da correnteza.

a) 5km/s

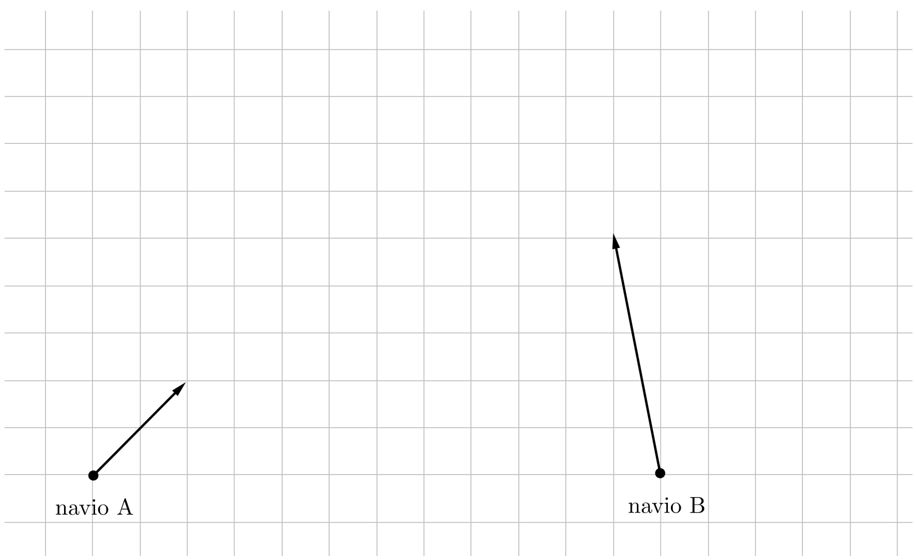
b) 4km/s

c) 3km/s

d) 2km/s

e) 6km/s

Problema 6. (Renato Brito) A figura mostra em escala a velocidade vetorial de dois navios A e B que se movem com velocidade constante num oceano de águas paradas. Pede-se determinar qual a menor distância entre os navios durante essa travessia, em km. Cada célula quadrada tem lado 10 km.



Problema 7. (Renato Brito) No instante t = 0 s, uma canoa e uma lancha passam, respectivamente, pelos pontos A e B da água de um lago, movendo-se com velocidades constantes V_c e V_L conforme mostra a figura. Determine qual será a mínima distância entre a canoa e a lancha e após quanto tempo elas estarão em tal situação.
Dados: $\alpha = \beta = 60°$, $V_c = 40km/h$, $V_L = 80km/h$, AB = 20km.

Problema 8. (Renato Brito) Um rio de margens paralelas tem uma correnteza de velocidade 6 m/s. Um piloto de uma lancha desejando ir de uma margem à outra, orienta o eixo do navio perpendicularmente às margens do rio e segue viagem, com o seu velocímetro indicando uma velocidade de 8 m/s. Se a distância de uma margem a outra é de 24 m, calcule:

a) a rapidez da lancha em relação às margens do rio;

b) o intervalo de tempo da travessia;

c) a distância percorrida pela lancha; e

d) o deslocamento da lancha, rio abaixo.

5. Gabarito

Problema 1. a) 3,0 minutos.
b) 10 km/h.

Problema 2. Letra D.

Problema 3. 36 horas.

Problema 4. Letra e.

Problema 5. Letra c.

Problema 6. $D_{min} = 96km$

Problema 7. $D_{min} = 10Km$ e $\Delta t = 15min$

Problema 8. a) $v = 10$m/s
b) $t = 3$ segundos
c) $d_y = 30$ metros
d) $d_x = 18$ metros

6. Apêndice

6.1 Dedução da Lei dos Cossenos

A lei dos cossenos no diz que em um triângulo qualquer (Figura 12), se tivermos dois lados e um ângulo entre eles, somos capazes de determinar o terceiro lado utilizando a seguinte equação:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

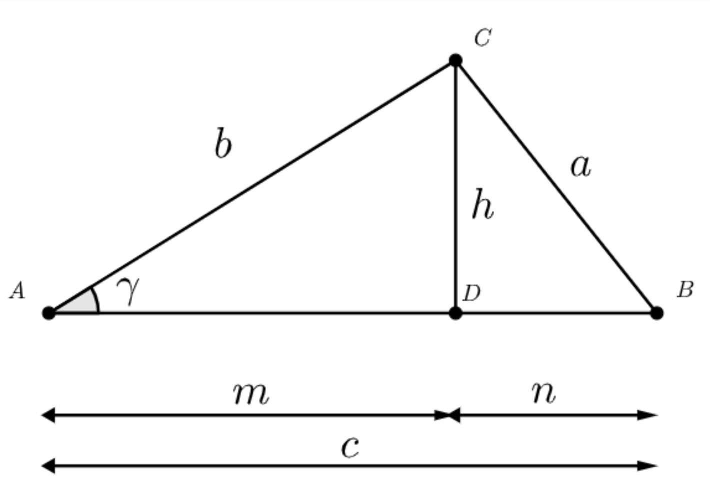


Figura 12: Triângulo

Nossa missão é a partir deste triângulo encontrar a ralação apresentada acima.

Perceba que temos um triângulo maior ΔABC, que a partir de sua altura h deste triângulo, conseguimos dividi-lo em outros dois triângulos menores ΔACD e ΔBCD. Então utilizando as relações trigonométricas nos triângulos, temos:

1. $\cos(\gamma) = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos(\gamma)$;
2. $n = a - m \Rightarrow n = a - b \cdot \cos(\gamma)$;
3. $\sin(\gamma) = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin(\gamma)$; e
4. $c^2 = n^2 + h^2$.

Mas sabemos que:

$$n^2 = (a - b \cdot \cos(\gamma))^2 \quad \text{e que} \quad h^2 = b^2 \cdot \sin(\gamma)$$

Logo:

$$c^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) + b^2 \cdot \cos^2(\gamma)^2 + b^2 \cdot \sin^2(\gamma)$$
$$c^2 = b^2 \cdot (\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma) + a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Pela relação fundamental de trigonometria: $\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma) = 1$, obtemos:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)} \quad \text{(XVI)}$$

6.2 Dedução da Lei dos Senos

A lei dos senos é uma ferramenta muito poderosa que relaciona diferentes lados, com diferentes ângulos. Esta lei é expressa da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}} \tag{XVII}$$

Nosso objetivo é chegar na equação apresentada acima, a partir de um triângulo qualquer (Figura 13). Para isto, devemos relacionar os ângulos β e γ com os seus lados a partir das relações trigonométricas.

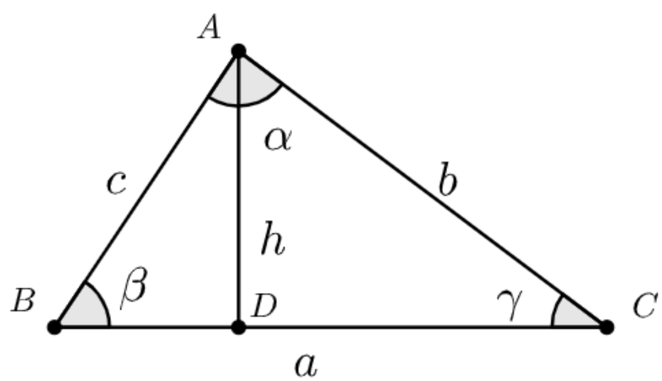


Figura 13: Triângulo 02

1. $\sin(\gamma) = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin(\gamma)$
2. $\sin(\beta) = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \sin(\beta)$

Então percebe-se que a partir dessas relações, chegamos que:

$$b \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\beta)$$

Logo, manipulando a expressão, conseguimos obter que:

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Para provar que toda aquela expressão é igual a $\frac{a}{\sin(\alpha)}$, basta traçar uma altura relativa ao ponto B e realizar os mesmos procedimentos. Demonstre isso!

6.3 Dedução da Aceleração Centrípeta

Em primeiro lugar, devemos saber a diferença entre a aceleração tangencial e centrípeta. Na verdade, sabemos que a aceleração é um vetor e pode ser quebrado numa soma entre a aceleração tangencial e centrípeta, isto é: $\vec{a} = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_t$

A aceleração tangencial é responsável pela variação do módulo do vetor velocidade. Por outro lado, a aceleração centrípeta é responsável pela variação da direção do vetor velocidade, sendo a responsável pelo corpo fazer curvas.

Imagine que em uma circunferência de raio r, tenhamos um corpo no ponto A e começa a se mover e chega até o ponto B (Figura 14).

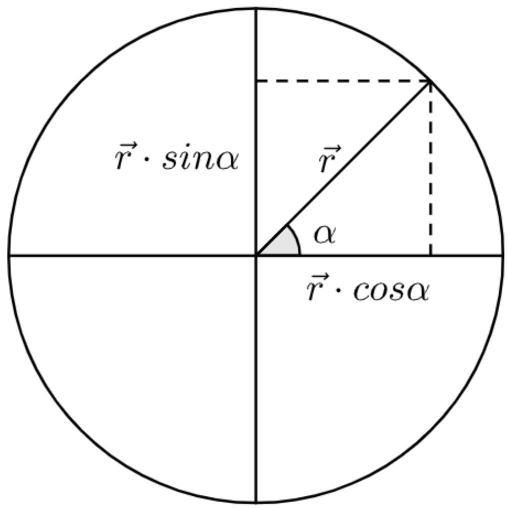


Figura 14: Circunferência de raio r

Pela definição da circunferência, temos que a distância do centro até o ponto B é o vetor raio, que podemos decompor em:

$$\vec{r}_x = \vec{r} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\vec{r}_y = \vec{r} \cdot \sin(\alpha)$$

Além disso, podemos a partir dos versores unitários, unir essas duas equações apresentadas, em apenas uma:

$$\vec{r} = r \cdot cos(\alpha)\hat{i} + r \cdot sin(\alpha)\hat{j}$$

Se derivarmos o vetor posição em relação ao tempo, temos:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{d(\alpha)}{dt}\hat{i} + r \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{d(\alpha)}{dt}\hat{j}$$

Mas sabemos que $\frac{d(\alpha)}{dt} = \omega$, portanto, se substituirmos, temos:

$$\vec{v} = -\omega \cdot r \cdot \sin(\alpha)\hat{i} + \omega \cdot r \cdot \cos(\alpha)\hat{j}$$

A expressão que acabamos de encontrar nos permite encontrar a velocidade em qualquer ponto da trajetória, supondo que α seja $\frac{\pi}{2}$, temos que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, ora pois, então o corpo estará a 90° no sentido do ponto A, com uma velocidade igual a $-\omega \cdot r$.
Nesse caso, derivamos o vetor posição uma vez e encontramos a velocidade, entretanto, estamos em busca da aceleração, para isto, basta derivar novamente em função do tempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 \cdot r \cdot \cos(\alpha)\hat{i} - \omega^2 \cdot r \cdot \sin(\alpha)\hat{j}$$

Na equação de cima efetuei tudo direto, mas, na verdade, como $\omega \cdot r$ é uma constante, então ele irá sair da derivada e teremos apenas a derivada em relação ao $\sin(\alpha)$ que é $\cos(\alpha)$ e como estamos derivando em relação ao tempo, devemos multiplicar pela derivada do argumento em relação ao tempo, por isso temos um ω^2.
Podemos fatorar a equação encontrada e deixar em função do $-\omega^2$, ou seja,

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \left(\vec{r} \cdot \cos(\alpha)\hat{i} + r \cdot \sin(\alpha)\hat{j}\right)$$

Percebeu algo curioso? Justamente o que temos no argumento, é o vetor posição que demonstramos anteriormente, logo podemos escrever esta equação em função dele:

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

Como nesse caso, não temos a aceleração tangencial, acabamos de demonstrar a aceleração centrípeta, basta tirar o módulo de ambos os lados e lembrar que $v = \omega \cdot r$, então, podemos concluir que:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} \tag{XVIII}$$