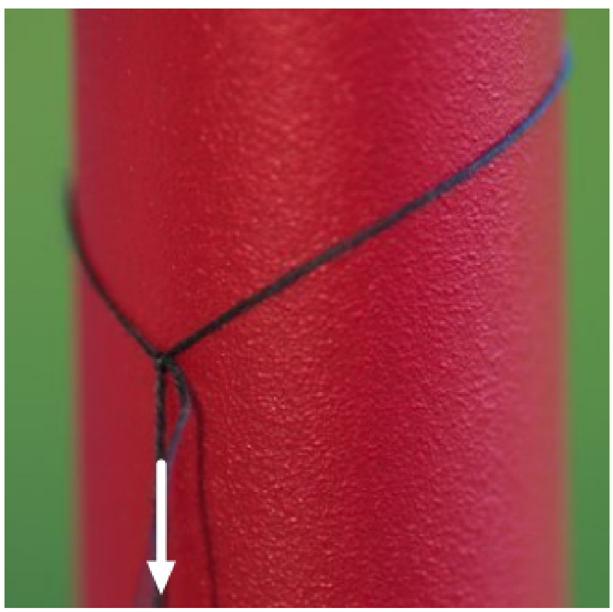
Resolução EuPhO 2021 - Questão 2

Alicia Duarte Silva - Projeto Olímpicos

1. T2 - Barbante ao redor do cilindro

Uma ponta do barbante é amarrada em um laço de tamanho $L > 2\pi R$ e um cilindro de raio R é colocado dentro do loop. O coeficiente de fricção entre o barbante e o cilindro é μ. O lado livre do barbante é puxado paralelamente ao eixo do cilindro (como mostrado na figura abaixo) enquanto este é mantido parado. Se o tamanho do barbante for maior que um valor crítico, $L > L_o$, o loop desliza pelo cilindro sem mudar sua configuração. Do contrário, a fricção o "prende" e aumentar a força que o puxa para baixo acabaria causando sua quebra. Despreze a massa do barbante e considere que ele não se torce quando puxado. Encontre o valor crítico de L_0.



Talvez seja útil saber que:

$$2\int \sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x$$

Onde:

$$\sinh^{-1} x \equiv \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

2. Resolução

O método que será usado baseia-se inteiramente em relações geométricas, segunda lei de Newton e aproximações para pedaços infinitesimais de barbante.

- Comecemos com a equação que caracteriza o caso de tamanho crítico:

$$F_{at} = \mu \cdot N$$

- Cálculo da força normal para um pedaço de fio horizontal:
  Para um pedaço infinitesimal de fio enrolado em volta do cilindro temos por decomposição da força da tração que :

$$2T \sin \frac{d\theta}{2} = N$$

  Usando a expansão de Taylor para o sin acima:

$$T \cdot d\theta \approx N$$

  No caso do fio estar em um ângulo α com a horizontal, a componente da tração que vai influenciar na componente da normal é dada por: $T \cdot \cos \alpha$, tal que:

$$N \approx T \cdot \cos \alpha \cdot d\theta$$

  A força de fricção é dada , então, por:

$$F_{at} = \mu \cdot (T \cdot \cos \alpha \cdot d\theta)$$

- Da parte do enunciado que diz que, se o fio começar a deslizar, ele o faz sem alterar a configuração, podemos inferir que a força de fricção atua unicamente na direção vertical, paralelo ao eixo do cilindro. Escrevendo a equação de equilíbrio de forças para a vertical num pedaço infinitesimal de fio, temos:

$$((T + dT) \cdot \sin (\alpha + d\alpha)) + F_{at} = T \cdot \sin \alpha$$

  Aplicando a expansão de Taylor para os fatores com termos infinitesimais:

$$T \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha + dT \cdot \sin \alpha + F_{at} = 0$$

$$T \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha + dT \cdot sin\alpha + \mu \cdot T \cdot \cos \alpha \cdot d\theta = 0$$

- Agora, usando o fato de que o fio não vai deslizar na horizontal, podemos inferir que a tração na direção horizontal é constante.

$$T \cos \alpha = cte$$

$$d (T \cos \alpha) = 0$$

$$(dT) \cos \alpha + T (- \sin \alpha \cdot d\alpha) = 0$$

$$dT = T \cdot \tan \alpha \cdot d\alpha$$

  Substituindo a expressão para dT na equação final da lei de Newton vertical:

$$T \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha + (T \cdot \tan \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha + \mu \cdot T \cdot \cos \alpha \cdot d\theta = 0$$

"Cortando" os "T" e isolando os termos de $d\alpha$ e $d\theta$:

$$\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{cos^2\alpha} \cdot d\alpha = -\mu \cdot d\theta$$

Usando que :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = \left(1 + \tan^2 x\right)$$

Temos:

$$\sec^2\alpha \cdot d\alpha = -\mu \cdot d\theta$$
$$d\theta = -\frac{sec^2\alpha \cdot d\alpha}{\mu}$$

- Falta, agora, escrever a integral que representa o tamanho do fio enrolado no cilindro. Usando o fato de que o comprimento infinitesimal horizontal do fio é definido pelo ângulo de abertura "$d\theta$" e o raio do cilindro "R":

$$dH = R \cdot d\theta$$

Já que o fio está a um ângulo "α" com a horizontal, o comprimento total é dado por:

$$dH = dL \cdot \cos\alpha$$
$$dL = \frac{dH}{\cos\alpha}$$
$$dL = \frac{R \cdot d\theta}{\cos\alpha}$$
$$dL = R \cdot \sec\alpha \cdot d\theta$$

Substituindo o valor de $d\theta$ previamente encontrado e usando, também, a seguinte relação:

$$d\tan x = sec^2 x \cdot dx$$

Temos que:

$$dL = R \cdot \sqrt{1 + \tan^2\alpha} \cdot \left(-\frac{d\tan\alpha}{\mu}\right)$$
$$dL = -\frac{R}{\mu} \cdot \sqrt{1 + \tan^2\alpha} \cdot d\tan\alpha$$

- Basta, então, integrar a função de dL para todo o fio. É necessário fazer algumas considerações quanto aos limites de integração. Inicialmente o diferencial presente era o $d\theta$, que, sendo o ângulo compreendido pelo cilindro inteiro, deveria ser integrado de 0 a 2π ou duas vezes de 0 a π. Como o setup é simétrico em torno de π (pensando no próprio cilindro, seu ponto de máximo e mínimo), a segunda opção pode ser utilizada.
Ao integrar a função que temos entre $d\theta$ e $d\tan\alpha$, obtemos a seguinte relação:

$$-\mu \cdot \theta = \tan\alpha$$

Aplicando os valores de $\theta = 0$ e $\theta = \pi$,

$$(\tan \alpha)_{\theta=0} = 0$$

$$(\tan \alpha)_{\theta=\pi} = -\mu \cdot \pi$$

Podemos escrever o comprimento do fio sendo igual a:

$$L = 2 \int_{0}^{-\mu \cdot \pi} dL$$

$$L = 2 \cdot \left(-\frac{R}{\mu}\right) \int_{0}^{-\mu \cdot \pi} \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot d \tan \alpha$$

Usando o resultado da integral dada no problema,

$$L = \left(-\frac{R}{\mu}\right) \left(-\mu \cdot \pi \sqrt{1 + \mu^2 \cdot \pi^2} + \ln \left(-\mu \cdot \pi + \sqrt{1 + \mu^2 \cdot \pi^2}\right)\right)$$

$$L = \pi R \sqrt{1 + (\mu \pi)^2} - \frac{R}{\mu} \left(\ln \left(-\mu \cdot \pi + \sqrt{1 + (\mu \pi)^2}\right)\right)$$

$$L = \pi R \sqrt{1 + (\mu \pi)^2} + \frac{R}{\mu} \left(\ln \left(\mu \cdot \pi + \sqrt{1 + (\mu \pi)^2}\right)\right)$$