Resolução TBF - Questão 2

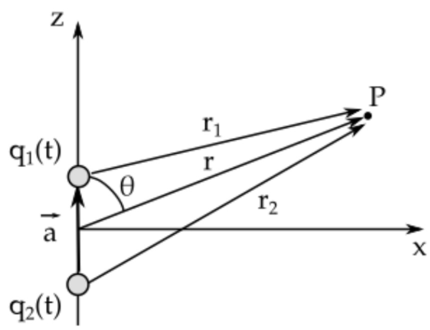
Lucas Takayasu - Projeto Olímpicos

1. Enunciado

Sistemas elétricos ou magnéticos estáticos não são capazes de gerar ondas eletromagnéticas que se propagam ao longo do espaço. Neste problema vamos desenvolver um modelo eletromagnético de radiação de um dipolo elétrico oscilante. Trata-se de um modelo simplificado que demonstra como carga elétricas oscilantes são capazes de irradiar energia através de campos eletromagnéticos.

Parte I

Um dipolo elétrico de momento de dipolo $\vec{p}(t) = q(t)\vec{a}$ pode ser modelado por um par de cargas elétricas de cargas oscilantes $q_1(t) = q_0 \cos(\omega t)$ e $q_2(t) = -q_1(t)$ unidas por uma haste rígida de comprimento a. O sentido e a direção do vetor dipolo elétrico $\vec{p}$ são os mesmos do vetor que liga a carga $q_2(t)$ à carga $q_1(t)$. O momento de dipolo elétrico varia segundo a expressão $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$. Por simplicidade, considere o vetor $\vec{a}$ orientado paralelamente ao eixo vertical $\hat{z}$ e que o centro geométrico do dipolo localiza-se na origem do sistema de coordenadas. Vamos calcular quantidades de interesse no ponto $P(\vec{r})$, distante de r_1 da carga 1 e r_2 da carga 2. Veja a figura a seguir.



O meio no qual encontra-se o dielétrico é o vácuo, cuja constante eletrostática é $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ e permeabilidade magnética μ_0.

Segundo a relatividade restrita, não é possível que a informação da variação do valor das cargas seja transmitida instantaneamente a todo o espaço. Por essa razão, consideraremos que, quando o valor de uma carga pontual sofre uma alteração, o potencial elétrico associado é 'atualizado' após um tempo de propagação com velocidade da luz c através do espaço. A mesma hipótese pode ser feita para o potencial vetor magnético gerado.

a) Considerando que não há acumulo de cargas elétricas na haste que une as cargas $q_1(t)$ e $q_2(t)$, determine a corrente elétrica $I(t)$ associada à variação do dipolo $p(t)$.

b) Calcule o potencial elétrico $V(\vec{r}, t)$ gerado pela superposição do potencial retardado das duas cargas. Deixe sua resposta em termos de K, q_0, r_1, r_2 e c. Considere efeitos de atraso e não faça, por ora, qualquer tipo de aproximação geométrica.

c) Escreva a expressão do potencial vetor $A(\vec{r}, t)$ gerado pelo dipolo elétrico oscilante. Considere efeitos de atraso e não faça, por ora, qualquer tipo de aproximação geométrica.

Parte II

Um parâmetro de comprimento importante desse problema é o comprimento de onda associado à onda eletromagnética emitida pelo dipolo, $\lambda = c/\omega$. Consideraremos agora aproximações úteis que ajudam a simplificar as expressões encontradas para $V(\vec{r})$ e $\vec{A}(\vec{r})$. A primeira será a aproximação de dipolo curto ($a \ll \lambda$) e a segunda será a condição de campo distante ($r \ll \lambda$). A partir desse ponto, despreze termos de ordem superior a $1/r$. Devido aos efeitos relativísticos de retardamento dos potenciais, deixe suas respostas em termos do instante $\tau = t - r/c$.

d) Determine a expressão do potencial elétrico $V(\vec{r}, \tau)$ gerado por um dipolo elétrico curto oscilante na região de campo distante. Deixe sua resposta em termos de ω, p_0, e demais constantes físicas intervenientes.

e) Determine a expressão do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, \tau)$ gerado por um dipolo elétrico curto oscilante na região de campo distante. Deixe sua resposta em termos de ω, p_0 e demais constantes físicas intervenientes

Parte III

A partir do potencial elétrico escalar e do potencial vetor determinados na Parte II é possível determinar os campos elétricos e magnéticos gerados pelo dipolo. Por conveniência, fornecemos os campos gerados por um dipolo elétrico curto na região de campo distante

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)\cos(\omega\tau)\hat{\theta}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)\cos(\omega\tau)\hat{\phi}$$

f) Classifique a onda eletromagnética emitida pelo dipolo com respeito a sua polarização no ponto $P(r, \theta, \phi)$.

g) Demonstre, a partir dos campos elétrico e magnético fornecidos, que o dipolo elétrico oscilante irradia energia.

h) O dipolo elétrico oscilante é uma fonte de radiação isotrópica? Em caso negativo, indique a(s) direção(ões) em que a sua irradiação de energia é máxima.

2. Resolução

a) Pela conservação de cargas, podemos associar uma corrente elétrica I fluindo ao longo da haste constantemente:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(q_0\cos(\omega t))}{dt} = \boxed{-q_0\omega\sin(\omega t)}$$

b) Sabemos o potencial instantâneo para uma carga $q_1(t)$:

$$V_1 = \frac{Kq_1(t)}{r_1}$$

Considerando o tempo necessário para que a informação seja transmitida: $\Delta t = r/c \Rightarrow t' = t - r/c$, podemos obter uma expressão para o potencial retardado:

$$V_1 = \frac{Kq_1(t - \Delta t)}{r_1} = \frac{Kq_0 \cos(\omega(t - r_1/c))}{r_1}$$

Assim, analogamente para $q_2(t)$, e aplicando o princípio da superposição:

$$\boxed{V(\vec{r}, t) = \frac{Kq_0 \cos(\omega(t - r_1/c))}{r_1} - \frac{Kq_0 \cos(\omega(t - r_2/c))}{r_2}} \tag{1}$$

c) Sabemos a corrente $I(t)$ pelo item (a), e pelas convenções do enunciado ela tem direção em $\hat{z}$. Assim para calcular o potencial vetor retardado podemos usar $I(t - \Delta t)$, de forma análoga ao item anterior.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\vec{I}(t - \Delta t) dl}{r'}$$

Aqui, definimos r' como a distância entre um elemento de comprimento na haste e o ponto determinado pelo vetor $\vec{r}$. Sem aproximações geométricas, não há muitas simplificações possíveis para a integral. Logo, apenas substituindo o que conhecemos na expressão:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \hat{z}\, \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{I(t - r'/c)}{r'} dz = \boxed{-\hat{z}\, \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{q_0 \omega \sin(\omega(t - r'/c))}{r'} dz} \tag{2}$$

d) Sabemos da equação (1), obtida no item b) que:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{Kq_0 \cos(\omega(t - r_1/c))}{r_1} - \frac{Kq_0 \cos(\omega(t - r_2/c))}{r_2}$$

Para utilizarmos as aproximações de um dipolo elétrico curto, é interessante aproveitarmos da geometria e do auxílio do ângulo θ. Assim, podemos tentar deixar r_1 e r_2 como função de r e θ, que podem ser relacionados pela **lei dos cossenos**:

$$r_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 - 2r\frac{a}{2} \cos\theta \Rightarrow r_1 = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - ra\cos\theta}$$

Podemos também utilizar a lei dos cossenos para o ângulo suplementar de θ para encontrar r_2:

$$r_2 = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - ra\cos(\pi - \theta)} = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} + ra\cos(\pi - \theta)}$$

Sabendo que $a \ll \lambda$ e $r \gg \lambda \Rightarrow r \gg a$, podemos expandir as expressões de r_1 e r_2 pela aproximação: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, para $x \ll 1$

$$r_1 = r\sqrt{1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r}\cos\theta} \approx r\left(1 + \frac{a^2}{8r^2} - \frac{a}{2r}\cos\theta\right) \approx r\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

Analogamente para r_2:

$$r_2 \approx r\left(1+\frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

Não podemos aproximar mais as expressões de r_1 e r_2 para além disso, pois se desprezássemos os termos de $\dfrac{a}{2r}$ teríamos que $r_1 = r_2 = r$, e logo o potencial seria nulo, o que perderia o sentido físico do problema, assim paramos na **primeira ordem**.

Assim, se substituirmos essas expressões para r_1 e r_2 no potencial elétrico retardado (1), em que r_1 e r_2 aparecem tanto dentro do cos quanto no denominador, poderemos fazer ainda mais aproximações. Começando pela aproximação do cos para r_1:

$$\begin{aligned}\cos(\omega(t-r_1/c)) \approx \cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\left(1-\frac{a}{2r}\cos\theta\right)\right)\right) = \cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}+\frac{a}{2c}\cos\theta\right)\right) = \\ = \cos\left(\omega\left(\tau+\frac{a}{2c}\cos\theta\right)\right) = \cos\Big(\omega\tau+\frac{\omega a}{2c}\cos\theta\Big) = \cos\Big(\omega\tau+\frac{a}{2\lambda}\cos\theta\Big)\end{aligned}$$

Nesta expressão não podemos simplesmente desprezar os termos de $\dfrac{a}{2\lambda}$, visto que anteriormente sequer pudemos desprezar $\dfrac{a}{2r}$, e $r \gg \lambda$. Então para aproximar além disso, teremos que expandir o cos.

É dado no enunciado que $\tau = t - r/c$, e que $\lambda = c/\omega$. Sabemos também que $a \ll \lambda$, e logo podemos expandir o cos da soma: $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, para fazer aproximações.

$$\cos\Big(\omega\tau+\frac{a}{2\lambda}\cos\theta\Big) = \cos(\omega\tau)\cos\Big(\frac{a}{2\lambda}\cos\theta\Big) - \sin(\omega\tau)\sin\Big(\frac{a}{2\lambda}\cos\theta\Big)$$

$$a \ll \lambda \Rightarrow \cos\Big(\omega\tau+\frac{a}{2\lambda}\cos\theta\Big) \approx \cos(\omega\tau) - \frac{a}{2\lambda}\cos\theta\sin(\omega\tau)$$

Aqui, aproximamos em **primeira ordem** que:

$$\cos\Big(\frac{a}{2\lambda}\cos\theta\Big) \approx 1 \qquad \text{e} \qquad \sin\Big(\frac{a}{2\lambda}\cos\theta\Big) \approx \frac{a}{2\lambda}\cos\theta$$

O que é diferente de simplesmente desprezar os termos de $\dfrac{a}{2\lambda}$, o que daria uma expansão de ordem zero. Assim não podemos aproximar para além disso, por enquanto.

De forma análoga, para r_2 obteremos que:

$$\cos\Big(\omega\tau-\frac{a}{2\lambda}\cos\theta\Big) \approx \cos(\omega\tau) + \frac{a}{2\lambda}\cos\theta\sin(\omega\tau)$$

Resumindo todas as aproximações que envolvem r_1 e r_2 até agora:

$$\begin{cases} r_1 \approx r\left(1-\dfrac{a}{2r}\cos\theta\right) \\ r_2 \approx r\left(1+\dfrac{a}{2r}\cos\theta\right) \\ \cos(\omega(t-r_1/c)) \approx \cos(\omega\tau) - \dfrac{a}{2\lambda}\cos\theta\sin(\omega\tau) \\ \cos(\omega(t-r_2/c)) \approx \cos(\omega\tau) + \dfrac{a}{2\lambda}\cos\theta\sin(\omega\tau) \end{cases}$$

Finalmente, concluindo nosso objetivo inicial de substituir na expressão (1):

$$V(\vec{r},t) \approx \frac{Kq_0}{r}\left(\frac{\cos(\omega\tau) - \frac{a}{2\lambda}\cos\theta\sin(\omega\tau)}{1-\frac{a}{2r}\cos\theta} - \frac{\cos(\omega\tau) + \frac{a}{2\lambda}\cos\theta\sin(\omega\tau)}{1+\frac{a}{2r}\cos\theta}\right)$$

Com isso, podemos juntar estas duas frações em uma só, o que fará aparecer alguns termos de $\left(\frac{a}{r}\right)^2$, ou seja, de segunda ordem, que poderão ser desprezados, visto que estamos trabalhando em primeira ordem. Logo:

$$V(\vec{r},t) \approx \frac{Kq_0}{r}\left(\frac{\left(1+\frac{a}{2r}\cos\theta\right)\left(\cos(\omega\tau) - \frac{a}{2\lambda}\cos\theta\sin(\omega\tau)\right) - \left(1-\frac{a}{2r}\cos\theta\right)\left(\cos(\omega\tau) + \frac{a}{2\lambda}\cos\theta\sin(\omega\tau)\right)}{\left(1-\frac{a}{2r}\cos\theta\right)\left(1+\frac{a}{2r}\cos\theta\right)}\right)$$

$$= \frac{Kq_0}{r}\left(\frac{\frac{a}{r}\cos\theta\cos(\omega\tau) - \frac{a}{\lambda}\cos\theta\sin(\omega\tau)}{1-\frac{a^2}{4r^2}\cos\theta}\right) \approx \frac{Kq_0 a\cos\theta}{r}\left(\frac{\cos(\omega\tau)}{r} - \frac{\sin(\omega\tau)}{\lambda}\right)$$
$$= \frac{Kp_0\cos\theta}{r}\left(\frac{\cos(\omega\tau)}{r} - \frac{\sin(\omega\tau)}{\lambda}\right)$$

Assim, obtemos uma expressão polar para o potencial elétrico retardado como função de $\vec{r}$ e τ, no caso de um dipolo elétrico curto oscilante na região de campo distante.

É interessante notar que o caso estático (não oscilante), de um dipolo elétrico normal, pode ser recuperado deste resultado, em que se tomarmos o limite $\omega \to 0$, obtemos a boa e velha fórmula:

$$V = \frac{Kp_0\cos\theta}{r^2}$$

Também poderíamos ter ido um pouco além e interpretar o que é dito no enunciado: "despreze termos de ordem superior a $1/r$", o que nos daria para o potencial retardado:

$$\boxed{V(\vec{r},t) = -\frac{Kp_0\cos\theta\sin(\omega\tau)}{r\lambda}}$$

e) A partir da equação (2) obtida em c), seria muito difícil utilizar todas as mesmas aproximações que utilizamos no item anterior para calcular a integral. Porém, como nos próprios limites da integral temos o fator a, a nossa vida ficará bem mais fácil, visto que podemos, até primeira ordem, trocar o que está dentro da integral pelo valor em seu centro, ou seja, trocando r' por r, e assim a integral se torna trivial:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = -\hat{z}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_0\omega\sin(\omega(t-r/c))}{r}\int_{-a/2}^{a/2} dz = -\frac{\mu_0 q_0 a\omega\sin(\omega\tau)}{4\pi r}\hat{z} = \boxed{-\frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi r}\sin(\omega\tau)\hat{z}}$$

f) É notável pelas expressões dadas que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares, e que $\vec{E}$ sempre aponta na direção $\hat{\theta}$, logo a onda eletromagnética emitida pelo dipolo tem **polarização linear**, se propagando na direção $\hat{k} = \hat{\theta} \times \hat{\phi}$ com polarização (direção de $\vec{E}$) em $\hat{\theta}$.

g) Sabemos que ondas eletromagnéticas transportam energia. Para demonstrar que o dipolo elétrico oscilante irradia energia, podemos partir do vetor de Poynting, o qual representa o fluxo de energia por unidade de área e tempo. Assim:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Pelas expressões de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dadas, torna-se claro que que a direção de $\vec{E} \times \vec{B}$ será $\hat{r}$, em coordenadas esféricas. Assim, como eles são perpendiculares, podemos facilmente calcular o produto vetorial:

$$\vec{S} = \frac{|\vec{E}| \cdot |\vec{B}| \hat{r}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin\theta \cos(\omega\tau)}{4\pi r} \right)^2 \hat{r}$$

Tirando a média temporal desta expressão, obtemos a intensidade irradiada ao longo de um ciclo completo:

$$\langle \cos^2(\omega\tau) \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi r} \right)^2 \hat{r} = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

Integrando em torno de uma esfera de raio r, cujo elemento de área em coordenadas esféricas será: $r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$, podemos obter a potência média irradiada pelo dipolo oscilante:

$$\langle P \rangle = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\sin^2\theta}{r^2} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi c} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta$$

Para calcular a integral $\displaystyle\int \sin^3\theta \, d\theta$, podemos utilizar a redução de grau do $\sin^3\theta$:

$$\sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4} \Rightarrow \int \sin^3\theta \, d\theta = \int \frac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4} \, d\theta = -\frac{3\cos\theta}{4} + \frac{\cos(3\theta)}{12}$$

Aplicando os limites:

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = -\frac{3\cos\theta}{4} + \frac{\cos(3\theta)}{12} \Big|_0^{\pi} = -\frac{3\cos\pi}{4} + \frac{\cos(3\pi)}{12} + \frac{3\cos 0}{4} - \frac{\cos 0}{12} =$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{4}{3}$$

Logo:

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}}$$

Portanto, como $\langle P \rangle > 0$, concluímos que o dipolo elétrico oscilante irradia energia.

h) Analisando o vetor de Poynting (média):

$$\langle \vec{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

Notamos pela dependência com o $\sin^2\theta$ que o dipolo elétrico oscilante **não** é uma fonte isotrópica. Além disso, por essa dependência em relação a θ, concluímos que a a irradiação de energia é máxima quando $\theta = 90° = \pi/2$, ou seja ao longo do plano $x - y$.

Também é interessante notar que $\vec{S}$ não depende de ϕ, apresentando uma simetria ao longo do eixo z, e que ao longo do eixo do dipolo x, ou seja, para $\theta = 0$, não há radiação.