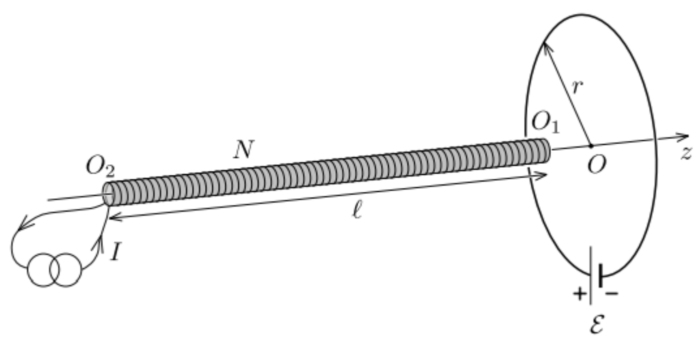
Resolução EuPhO 2020 - Questão 1

Alicia Duarte - Projeto Olímpicos

1. T1- Solenoide e Loop

Um loop fechado de raio "r" consiste de uma bateria ideal de força eletromotiva ξ e de um fio de resistência R. Um longo e fino solenoide, preenchido de ar em seu interior, é alinhado com o eixo do loop (eixo z). O seu comprimento é $l \gg r$, secção transversal de área é $A\left(r \gg \sqrt{A}\right)$ e o número de voltas é N. O solenoide possui uma corrente constante I produzida por um gerador de corrente ideal. As direções das correntes no loop e no solenoide são as mesmas (sentido horário, na figura).



a) Ache a força F_1 agindo no solenoide quando sua parte fronteira O_1 está no centro do loop O. Qual é a força F_2 agindo no solenoide quando sua parte traseira O_2 está localizada no centro do loop?

b) Suponha agora que o solenoide está se movendo lentamente com velocidade constante v ao longo do eixo z, começando bem longe do loop e indo para a direita, na direção positiva do eixo z. Plote a corrente J do loop em função do tempo. Marque no gráfico as características e valores importantes dele. A velocidade v é tão pequena que a autoindutância pode ser negligenciada.

2. Resolução

a)
- Como a corrente no solenoide é constante, seu campo magnético, que é diretamente proporcional à corrente, também é constante. $\rightarrow$ Não há força eletromotriz induzida no loop.
- Como não há força eletromotriz induzida no loop e sua corrente é gerada por uma bateria de corrente contínua e constante, seu campo magnético também é constante. $\rightarrow$ Não há força eletromotriz induzida no solenoide.

- O campo magnético que será gerado no eixo z pelo loop é dado pela lei de Biot-Savart, onde sabemos que $I_1 = \frac{\xi}{R}$:

$$\vec{B}_{loop} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{D}}{D^3}$$

Por simetria, o campo radial se anula e só sobra a componente axial do campo magnético.

$$\vec{B}_{loop} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{4\pi} \int \frac{dl \cdot \frac{\vec{z}}{D}}{D^2} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot r \cdot \vec{z}}{2 \cdot (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Essa fórmula é válida na nossa aplicação por causa da aproximação de que $r^2 \gg A$.

- Considerando o solenoide como uma configuração discreta de loop's e não contínua, temos que cada loop do solenoide está a uma distância $z(n) = \frac{nl}{N}$ do centro do loop. (Tendo que n é seu número a partir do centro do loop.)
Temos, também, que o momento de dipolo magnético para cada loop que compõe o solenoide é dado por:

$$m = I \cdot A$$

na direção positiva de z.

- A força exercida no solenoide pelo loop será calculada a partir da seguinte fórmula:

$$\vec{F} = \boldsymbol{\nabla} \left(\vec{m} \cdot \vec{B}_{loop} \right)$$

Como tanto o campo magnético do loop quanto o momento de dipolo magnético dos loop's do solenoide estão na mesma direção e no mesmo sentido, $\vec{m} \cdot \vec{B}_{loop} = mB_{loop}$:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I A r}{2} \cdot \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I I_1 A r}{2} \left(\frac{r^2 - 2z^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \right) \left(\frac{\vec{z}}{z} \right)$$

Essa é a força agindo em um dipolo a uma distância "z" do centro do loop.

$$\vec{F}_{total} = \sum_i \vec{F}_i(z)$$

$$\vec{F}_{total} = \frac{\mu_0 I I_1 A r}{2} \sum_{n=0}^{n=N} \frac{r^2 - 2\left(\frac{nl}{N}\right)^2}{\left(r^2 + \left(\frac{nl}{N}\right)^2\right)^{5/2}}$$

Definindo:

$$\frac{r^2 - 2\left(\frac{nl}{N}\right)^2}{\left(r^2 + \left(\frac{nl}{N}\right)^2\right)^{5/2}} \equiv C$$

Temos que quando:

$\cdot\ r \gg z \rightarrow C \approx \frac{1}{r^3}$
$\cdot\ z \gg r \rightarrow C \approx \frac{-2N^3}{n^3 l^3}$

Considerando que $l \gg r$, os termos da somatória em que $r \gg z$ serão dominantes $\left(\frac{1}{r^3}\right)$, apesar do fato de que os outros termos $\left(\frac{-2N^3}{n^3 l^3}\right)$ possuem o fator de $\left(\frac{N}{n}\right)^3$ junto do fator $\left(\frac{1}{l^3}\right)$.

- O número de termos dominantes será calculado com a aproximação de $z \approx r$ da fórmula da distância do centro do loop:

$$r \approx z = \frac{nl}{N}$$

$$n \approx \frac{Nr}{l}$$

- Levando em conta que o termo que foi encontrado como dominante na somatória é uma constante, ele será igual todas as vezes que somado e, portanto, a soma total é dada pelo número de vezes que em que ele é dominante multiplicado pelo seu valor. Aplicando todos os valores encontrados na somatória que já havíamos encontrado e lembrando que a força total encontrada é a força "F_1" pedida no enunciado, temos:

$$\vec{F}_{total} \approx \left(\frac{\mu_0 I \xi r A}{2R}\right)\left(\frac{Nr}{l}\right)\left(\frac{1}{r^3}\right)\left(\frac{\vec{z}}{z}\right)$$

$$\vec{F}_1 \approx \frac{\mu_0 N A I \xi}{2rlR}\left(\frac{\vec{z}}{z}\right)$$

- Quando a posição do solenoide está invertida, só o sentido do dipolo magnético dos loop's que o compõe se alteram, gerando um sinal negativo derivado do produto escalar calculado no gradiente da fórmula da força.

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

b) Não foi encontrada nenhuma solução alternativa ao gabarito oficial para a parte "b". A solução oficial pode ser encontrada aqui.